

**Movimientos de tránsito y seguimiento
de planetas con el
radiotelescopio de 40m**

P. de Vicente

Informe Técnico IT-OAN 2005-11

Índice

1. Introducción	2
2. Interpolación de diferencias divididas de Newton	2
3. Interpolación de diferencias hacia delante de Newton	4
4. Interpolación de polinomios de Lagrange	5
5. Interpolación por splines	6
6. Interpolación Step wise	8
7. Movimiento de tránsito del radiotelescopio entre dos posiciones	8
8. Uso de las interpolaciones para el seguimiento simple de astros	15
8.1. Astros del sistema solar	16
8.2. Astros externos al sistema solar	20
9. Uso de las interpolaciones para el movimiento superpuesto	26

1. Introducción

La interpolación consiste en calcular el valor de una función $f(x)$ para cualquier valor x a partir de los valores conocidos de una muestra $m(k)$ donde x es un número real, k un número entero cualquiera y la función interpolada es igual al valor de la muestra para todo k :

$$m[j] = f(j)$$

El ACU (Antenna Control Unit) del radiotelescopio de 40 m puede utilizar cuatro tipos de interpolaciones para determinar la posición de la antena en un cierto momento a partir de un conjunto de 5 puntos para los que se conoce la posición. Las interpolaciones soportadas son: “Newton”, “Lagrange”, “Splines” y “Step-Wise”.

Las tres primeras interpolaciones son continuas y la última en escalera. Las interpolaciones continuas son aquellas en las que el telescopio se mueve continua y suavemente sobre las posiciones calculadas. Cuando los datos estén equiespaciados se empleará la interpolación de diferencias hacia delante de Newton y cuando el espaciado no sea uniforme se emplearán polinomios de interpolación de Lagrange.

En el caso de las interpolaciones en escalera el telescopio se mueve hasta una posición, permanece en ella y luego vuelve a moverse para situarse en la segunda, permanecer en ella un tiempo y así sucesivamente. El tipo de interpolación elegido para este comportamiento se denomina “Step-Wise”.

En este informe se repasan los diferentes tipos de interpolaciones, su uso para determinar la posición de planetas y resto de fuentes astronómicas y para los movimientos de superposición.

2. Interpolación de diferencias divididas de Newton

La interpolación de diferencias divididas de Newton se emplea para calcular el valor de una función en una posición a partir de un conjunto de N valores equiespaciados o no. La aproximación se hace utilizando un polinomio P_{N-1} de orden $N - 1$.

Para comprender la interpolación de Newton generalizaremos el caso desde 2 puntos hasta N . Si sólo se conocen dos puntos la aproximación es lineal y el valor es el que corresponde a una línea recta que une ambas posiciones ($f(x) \simeq P_1(x)$). Es decir:

$$\begin{aligned} f(x) \simeq P_1(x) &= f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = \\ &= f_0 + [x_0, x_1]f(x - x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

Si se conocen tres puntos se utiliza una interpolación cuadrática y $f(x)$ se aproxima por un polinomio $P_2(x)$:

$$P_2(x) = f_0 + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_0)(x - x_1) \quad (2)$$

donde

$$[x_0, x_1]f = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \quad (3)$$

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \quad (4)$$

y a los términos de la izquierda en las ecuaciones 3 y 4, se les conoce con el nombre de **diferencias divididas**.

Se puede generalizar la interpolación a una de grado N . En este caso la función $f(x)$ se aproxima por el polinomio $P_N(x)$:

$$P_N(x) = f_0 + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0, \dots, x_N]f(x - x_0)\dots(x - x_{N-1}) \quad (5)$$

donde

$$[x_0, x_1, \dots, x_N]f = \frac{[x_1, \dots, x_N]f - [x_0, \dots, x_{N-1}]f}{x_N - x_0} \quad (6)$$

La expresión 5 se puede escribir de modo formal del siguiente modo:

$$P(x) = P_N(x) = \sum_{k=0}^N (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_N)[x_0, x_1, \dots, x_k]f \quad (7)$$

y el error que se comete con la aproximación es:

$$\delta = f(x) - P_N(x) = (x - x_0)\dots(x - x_N)[x_0, \dots, x_N, x]f \quad (8)$$

que se puede conocer con exactitud si conocemos el valor real de la función f en el punto que deseamos.

La expresión 5 para 5 puntos se puede visualizar fácilmente empleando una pirámide como la que se muestra a continuación:

x_0	f_0			
		$[x_0, x_1]f$		
x_1	f_1		$[x_0, x_1, x_2]f$	
		$[x_1, x_2]f$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]f$
x_2	f_2		$[x_1, x_2, x_3]f$	$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]f$
		$[x_2, x_3]f$	$[x_1, x_2, x_3, x_4]f$	
x_3	f_3		$[x_2, x_3, x_4]f$	
		$[x_3, x_4]f$		
x_4	f_4			

El cálculo de cada línea se obtiene a partir de la diferencia dividida de la línea anterior y posterior y de un grado menos. Por tanto, para el cómputo utilizando un ordenador se deberían calcular todos las diferencias divididas y emplear sólo los resultados de la diagonal superior (en negrita en la tabla) para obtener la expresión 5. La aproximación es válida para cualquier x dentro del intervalo comprendido entre el primer y último punto.

Es posible aproximar un función con N puntos empleando un polinomio de cuarto orden, aunque N sea mucho mayor que 5. Basta emplear un conjunto de 5 puntos consecutivos que construyan un intervalo en cuyo interior esté siempre el valor que se desea calcular. En los extremos esta aproximación funciona perfectamente ya que en el extremo inicial, se pueden emplear los primeros 5 valores incluso aunque el valor que se busca esté entre el primer y el segundo valor. Del mismo modo se puede emplear para el extremo final del intervalo.

3. Interpolación de diferencias hacia delante de Newton

La interpolación de diferencias hacia delante de Newton se emplea para calcular el valor de una función en una posición a partir de un conjunto de n valores equiespaciados. La aproximación se hace utilizando un polinomio de orden $n - 1$.

La función f toma un valor en $x = x_0 + pd$ que se aproxima por un polinomio según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 P(x_0 + pd) &= f_0 + p\Delta_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta_0^2 + \dots + \frac{p(p-1)(p-2)}{3}\Delta_0^3 + \\
 &+ \dots + \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n}\Delta_0^n \\
 &f_0 + p\Delta_0 + \left(\frac{p}{2}\right)\Delta_0^2 + \dots + \left(\frac{p}{n}\right)\Delta_0^n
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde

$$\begin{aligned}
 d &= x_{i+1} - x_i \\
 \Delta_i &= \Delta_i^1 = f_{i+1} - f_i \\
 \Delta_i^k &= \Delta_{i+1}^{k-1} - \Delta_i^{k-1}
 \end{aligned}$$

El error que se comete con la aproximación es:

$$\delta = d^{n+1} \left(\frac{p}{n+1}\right) f^{(n+1)}(x) \simeq \left(\frac{p}{n+1}\right) \Delta_0^{n+1} \tag{10}$$

Al igual que en el caso de las diferencias divididas la expresión 9 para 5 puntos se puede visualizar fácilmente empleando una pirámide como la que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{cccccc}
 x_0 & \mathbf{f_0} & & & & \\
 & & \Delta_0 & & & \\
 x_1 & f_1 & & \Delta_0^2 & & \\
 & & \Delta_1 & & \Delta_0^3 & \\
 x_2 & f_2 & & \Delta_1^2 & & \Delta_0^4 \\
 & & \Delta_2 & & \Delta_1^3 & \\
 x_3 & f_3 & & \Delta_2^2 & & \\
 & & \Delta_3 & & & \\
 x_4 & f_4 & & & &
 \end{array} \tag{11}$$

El cálculo de cada línea se obtiene a partir de la diferencia de la línea anterior y posterior y de un grado menos. Por tanto, para el cómputo utilizando un ordenador se deberían calcular todos las diferencias y emplear sólo los resultados de la diagonal superior (en negrita en la tabla) para obtener la expresión 9. La aproximación es válida para cualquier x dentro del intervalo comprendido entre el primer y último punto, aunque suele ser habitual elegir tres puntos antes del valor elegido y dos después de este.

Dado que el ICD (Interface Control Document) del ACU establece que para puntos equiespaciados MAN utilizará la interpolación de Newton, entendemos que se utilizará esta interpolación en lugar de la de las diferencias divididas. Además utilizará 5 puntos, para calcular las

posiciones intermedias del telescopio. No conocemos con exactitud como se elegirán esos 5 puntos, aunque el método estándar consiste en elegir 3 puntos antes y dos después del valor que se desea interpolar. La expresión de Newton para 5 puntos queda así:

$$P(x_0 + pd) = f_0 + p\Delta_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta_0^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3}\Delta_0^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4}\Delta_0^4 \quad (12)$$

4. Interpolación de polinomios de Lagrange

La interpolación de Lagrange se utiliza para calcular el valor de una función en una posición a partir de un conjunto de N valores. Se trata de una reformulación de la interpolación de Newton que no emplea el método de diferencias divididas y que resulta más costoso en términos de tiempo en un ordenador.

La función $f(x)$ se puede aproximar por un polinomio de Lagrange de orden N

$$f(x) \simeq P(x)$$

donde

$$P(x) = f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + \dots + f_NL_N(x) \quad (13)$$

$$= \sum_{k=1}^N f_k L_k(x) \quad (14)$$

donde

$$f_i = f(x_i) \quad (15)$$

y los polinomios de Lagrange son:

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^i \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (16)$$

Para orden 1 la aproximación es lineal:

$$P(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad (17)$$

Para orden 2 la aproximación es cuadrática:

$$P(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (18)$$

Los polinomios de Lagrange son todos del mismo orden y por tanto requieren más tiempo de cómputo. Además los polinomios de Lagrange pasan por todos los puntos, lo que se puede apreciar fácilmente porque cuando $x = x_i$, $L_i(x) = 1$ y $L_{i \neq j} = 0$. Una de las ventajas de estos

polinomios es que permiten escribir la forma analítica del polinomio si se conoce a priori el orden, y por tanto el número de puntos.

El ACU empleará una interpolación con 5 puntos, por tanto de grado 4, como en el caso de la interpolación de Newton. Si los puntos están equiespaciados la interpolación de Lagrange se puede reescribir de modo sencillo así:

$$f(x_0 + pd) \simeq \frac{(p^2 - 1)p(p - 2)}{24} f_{-2} - \frac{(p - 1)p(p^2 - 4)}{6} f_{-1} + \frac{(p^2 - 1)(p^2 - 4)}{4} f_0 - \frac{(p + 1)p(p^2 - 4)}{6} f_1 + \frac{(p^2 - 1)p(p + 2)}{24} f_2 \quad (19)$$

Al igual que con los polinomios de Newton, formalmente el punto del que se busca el valor puede estar en cualquier posición dentro del intervalo definido por el primer y el último punto.

5. Interpolación por splines

La interpolación por splines es una interpolación por partes ya que se ajusta un polinomio para cada intervalo de puntos. Sean $n + 1$ puntos diferentes tal que

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \quad (20)$$

y para los que se conocen sus valores:

$$f(x_i) = y_i \quad (21)$$

Si se desea encontrar un función spline de grado n :

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{k-1}(x) & x \in [x_{k-1}, x_k] \end{cases} \quad (22)$$

donde cada $S_i(x)$ es un polinomio de grado n .

La interpolación de splines lineales es la más sencilla. Consiste en conectar los puntos conocidos con líneas rectas:

$$S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad (23)$$

Para garantizar la continuidad en cada punto:

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i) \quad , i = 0, \dots, k - 1 \quad (24)$$

La interpolación de splines cuadráticos es aquella en la que,

$$S_i(x) = y_i + z_i(x - x_i) + \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)} (x - x_i)^2 \quad (25)$$

Los coeficientes se determinan eligiendo z_0 y usando la relación:

$$z_{i+1} = -z_i + 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (26)$$

La interpolación de splines cúbicos o de tercer orden es aquella en la que los polinomios en cada intervalo son de grado 3. Es decir sea un conjunto de $n + 1$ datos x_i , se puede contruir un conjunto de polinomios de orden 3 entre los puntos. La función spline de interpolación es:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

donde es necesario que se verifiquen las siguientes condiciones:

- La función interpolada es igual a los valores de la muestra: $S(x_i) = f(x_i)$.
- Deber haber continuidad entre cada intervalo

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1$$

- Debe haber continuidad entre cada intervalo hasta la segunda derivada:

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$$

y

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Si existen n polinomios de tercer grado con 4 parámetros cada uno existen $4n$ incógnitas a determinar. La propiedad básica de la interpolación que requiere que la función sea igual a los valores de la muestra en los puntos de esta. Por tanto esta condición ofrece $n + 1$ condiciones de contorno y la continuidad de las funciones y sus derivadas entre los polinomios da lugar a $3(n - 1)$ condiciones de contorno, que sumadas a la anterior suponen en total $4n - 2$ condiciones de contorno. Se requieren dos condiciones de contorno más que se pueden elegir de diferente modo para determinar los coeficientes de los polinomios. Por ejemplo,

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0. \quad (27)$$

que corresponde a un spline cúbico natural. En este caso:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}(x - x_i)^3 + z_i(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1} \right) (x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i \right) (x_{i+1} - x) \quad (28)$$

y

$$h_i = x_{i+1} - x_i. \quad (29)$$

Los coeficientes se pueden determinar resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \\ z_n = 0 \end{cases} \quad (30)$$

6. Interpolación Step wise

En la interpolación en escalera las pares de puntos (tiempo, posición) indican el momento en el que la antena abandona dicha posición para ir a la siguiente. El tránsito se hace a la mayor velocidad posible y una vez que llega a su punto de destino permanece en él hasta que el tiempo sea igual al del siguiente par. La figura 1 muestra el movimiento en un gráfico bidimensional de tiempo y posición.

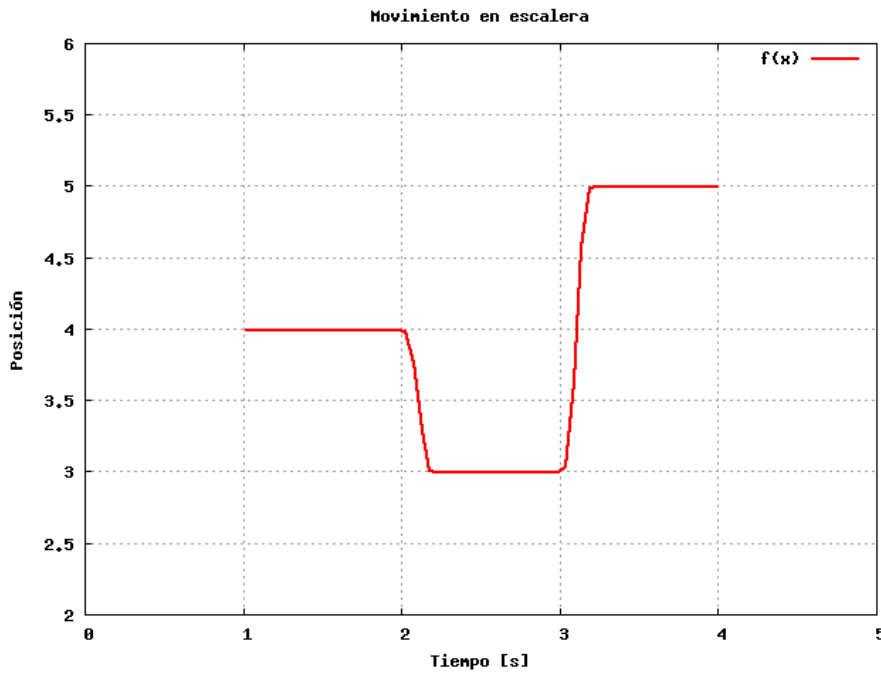


Figura 1: Movimiento en escalera del radiotelescopio empleando una interpolación 'setpwise'. Los puntos definidos en la tabla son $(t_1, p_1)=(2,4)$, $(t_2, p_2)=(3,3)$ y $(t_3, p_3)=(4,5)$.

Para poder calcular el tiempo que la antena permanece en cada punto es necesario conocer el tiempo de tránsito. Sea t_r el tiempo de tránsito que emplea la antena para moverse de p_i a p_{i+1} y $\delta t = t_{i+1} - t_i$ la diferencia de tiempos entre dos puntos consecutivos (t_i, p_i) y (t_{i+1}, p_{i+1}) , entonces el tiempo de integración sobre el punto $i + 1$ es:

$$t_{int} = \delta t - t_r \quad (31)$$

7. Movimiento de tránsito del radiotelescopio entre dos posiciones

El radiotelescopio se mueve de una posición a otra en el mínimo tiempo posible. Este comportamiento se muestra en la figura 2 donde se ha representado la velocidad frente al tiempo. t_0 es el tiempo en el que el telescopio comienza a moverse y t_f el momento en que se detiene

porque ha llegado a su posición final. El espacio recorrido es el área encerrada por la curva de velocidad. En ambos casos la velocidad crece hasta hacerse máxima, permanece constante y luego decrece hasta que vale 0. La curva continua corresponde al caso de aceleración infinita. La velocidad es 0 para t_0 y pasa a su máximo valor v_{max} instantáneamente y del mismo modo la antena se decelera instantáneamente. Este comportamiento corresponde a un caso ideal.

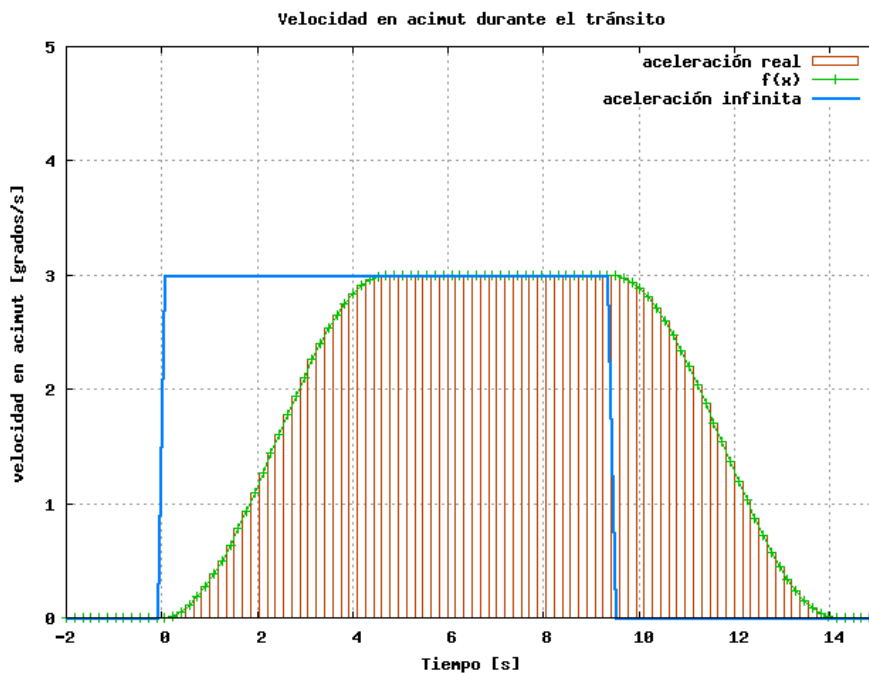


Figura 2: Velocidad del radiotelescopio durante el tránsito de una posición a otra. La curva continua corresponde al caso ideal con aceleración infinita. La curva con cruces indica el caso real con aceleración finita. Se ha pintado el área bajo dicha curva empleando rectángulos para indicar la distancia recorrida durante el tránsito. El tiempo empleado en el tránsito es menor en el caso ideal de aceleración infinita.

La curva con cruces muestra un caso realista. En ella la velocidad aumenta suavemente hasta alcanzar la velocidad máxima. En la rampa de subida, la pendiente de la curva (la aceleración) va cambiando hasta hacerse máxima y luego decrece hasta que la velocidad alcanza su valor máximo en cuyo momento la pendiente (la aceleración) es 0. El tiempo transcurrido para recorrer la misma distancia es mayor que en el caso ideal de aceleración infinita.

El caso que hemos representado es adecuado para describir el movimiento entre dos posiciones alejadas. Si las posiciones están muy cercanas la antena no dispone de tiempo para alcanzar su máxima velocidad. A continuación se expone con más detalle el movimiento de la antena al pasar de una posición a otra.

El movimiento de la antena se describe si se conoce la aceleración en función del tiempo. De acuerdo con MAN, la aceleración de los motores se puede modelar según la siguiente función:

$$a = A_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (32)$$

7 MOVIMIENTO DE TRÁNSITO DEL RADIOTELESCOPIO ENTRE DOS POSICIONES¹⁰

donde A_{max} es la máxima aceleración que puede adquirir la antena y T es el periodo de la senoide y puede tomar diferentes valores.

La expresión 32 es válida para pequeños desplazamientos ($T \leq T_{max}$). Si el desplazamiento es grande la antena alcanza la velocidad máxima; cuando la alcanza permanece constante y por tanto la aceleración vale 0. Antes de llegar a su posición final la antena decelera siguiendo la función de la ecuación 32. Es decir:

$$\begin{aligned} a &= A_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{max}}t\right) & / t \in [0, T_{max}/2] \\ a &= 0 & / t \in]T_{max}/2, \Delta t - T_{max}/2[\\ a &= A_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{max}}t\right) & / t \in [\Delta t - T_{max}/2, \Delta t] \end{aligned}$$

donde Δt es el tiempo necesario para la antena llegue a su punto de destino y T_{max} es el periodo de la función periódica que más adelante determinaremos.

La figura 3 muestra un ejemplo que contempla los dos casos explicados anteriormente.

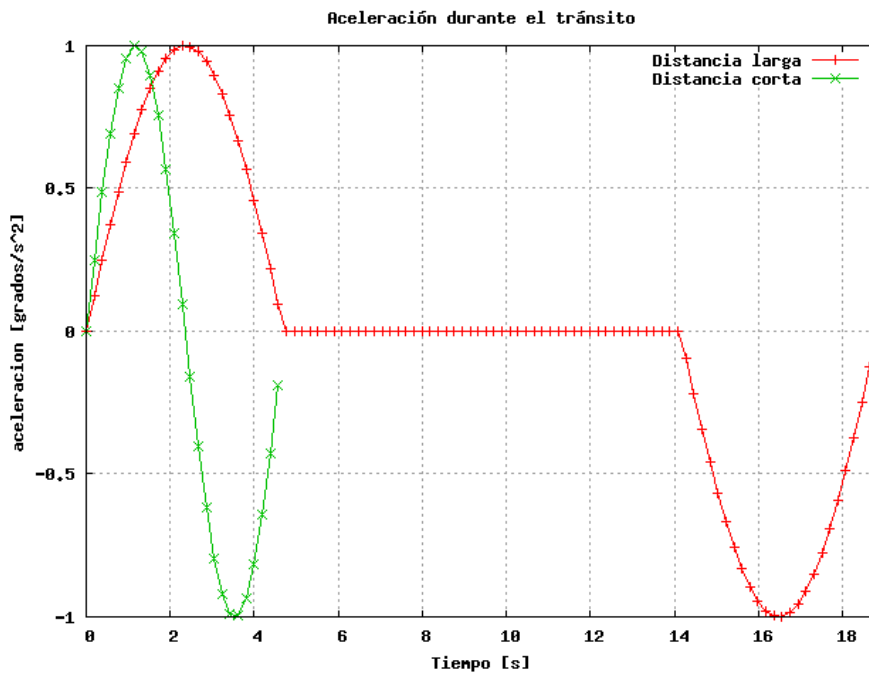


Figura 3: Aceleración durante el tránsito para los dos casos discutidos en esta sección: grandes distancias y pequeñas distancias.

La velocidad de la antena se puede obtener integrando la expresión anterior:

$$v = \int a dt = \int A_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = A_{max} \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + v_0 \quad (33)$$

para determinar v_0 aplicamos las siguientes condiciones de contorno:

- Cuando $t = 0$ la velocidad es 0:

$$0 = A_{max} \frac{T}{2\pi} + v_0 \quad (34)$$

Por tanto:

$$v_0 = -\frac{T}{2\pi} A_{max} \quad (35)$$

- La velocidad es máxima cuando $t = T/2$, es decir a mitad de periodo:

$$v_{max} = A_{max} \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) + v_0 \quad (36)$$

sustituyendo v_0 por su valor de acuerdo con la expresión 35 :

$$v_{max} = -A_{max} \frac{T}{\pi} \quad (37)$$

Esto quiere decir que la velocidad máxima (la amplitud de la señal periódica) es proporcional al periodo T y que su valor máximo está limitado y se produce cuando $T = T_{max}$:

$$V_{max} = -A_{max} \frac{T_{max}}{\pi} \quad (38)$$

Las especificaciones para la antena de 40 m del OAN indican que $V_{max} = 3^\circ/s$ en acimut y $V_{max} = 1^\circ/s$ en elevación y $A_{max} = 1^\circ/s^2$. Por tanto,

$$T \leq T_{max} = 3\pi = 9,42 \text{ s Az.} \quad (39)$$

$$= 1\pi = 3,14 \text{ s El.} \quad (40)$$

Tras aplicar las condiciones de contorno la expresión 33 queda,

$$v = A_{max} \frac{T}{2\pi} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 1 \right) = \frac{v_{max}}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right) \quad (41)$$

Si la antena realiza desplazamientos pequeños ($T < T_{max}$) la velocidad máxima siempre será inferior a V_{max} y el tiempo necesario para alcanzar esa velocidad será menor que $T_{max}/2$. La figura 4 muestra la relación entre la velocidad y la aceleración para dos periodos T diferentes.

La ecuación 41 es válida para pequeños desplazamientos ($T < T_{max}$). Si la antena realiza grandes desplazamientos ($T > T_{max}$) dicha ecuación describe la velocidad durante el tiempo en el que esta cambia con el tiempo, es decir en los tramos inicial y final del movimiento. Entre ambos tramos el telescopio se mueve a la máxima velocidad posible de modo constante. Es decir:

$$\begin{aligned} v &= V_{max}/2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_{max}} t\right) \right) & / t \in [0, T_{max}/2] \\ v &= V_{max} & / t \in]T_{max}/2, \Delta t - T_{max}/2[\\ v &= V_{max}/2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_{max}} (t - \Delta t + T_{max})\right) \right) & / t \in [\Delta t - T_{max}/2, \Delta t] \end{aligned}$$

7 MOVIMIENTO DE TRÁNSITO DEL RADIOTELESCOPIO ENTRE DOS POSICIONES¹²

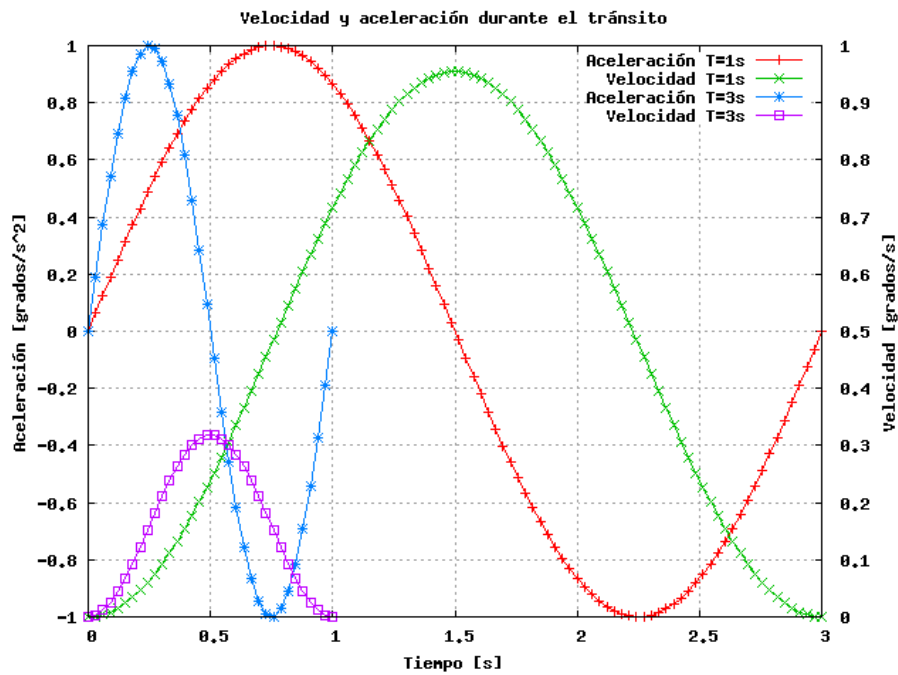


Figura 4: Aceleración y velocidad del radiotelescopio durante el tránsito para dos periodos T diferentes. La velocidad máxima disminuye cuando T disminuye y por tanto el espacio recorrido es menor. Esta situación se produce cuando el recorrido a realizar por la antena es pequeño. El recorrido es el área bajo la curva de velocidad.

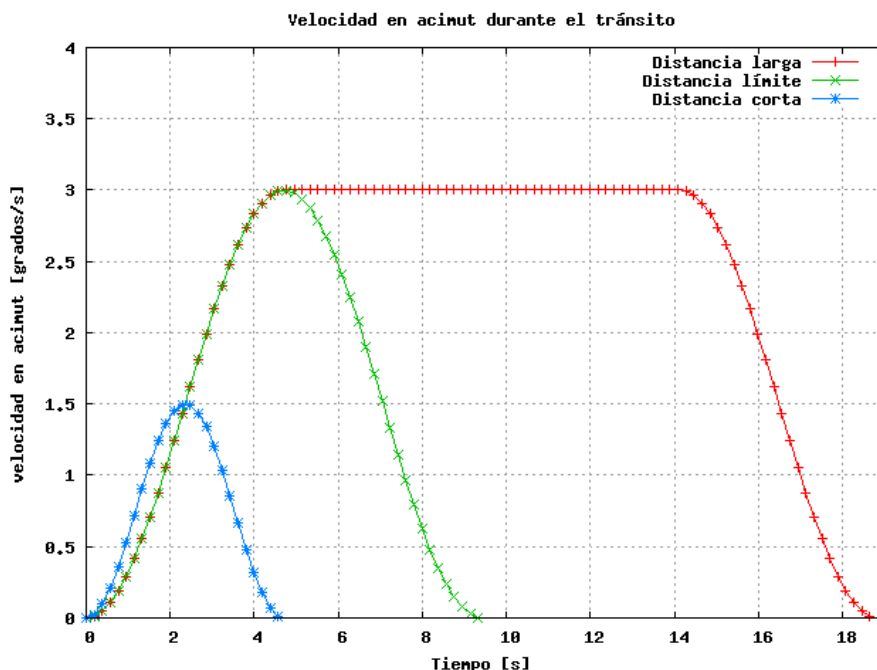


Figura 5: Velocidad de tránsito para los tres casos discutidos en esta sección: grandes distancias, distancia crítica y pequeñas distancias.

donde Δt es el tiempo necesario para la antena llegue a su punto de destino.

La figura 5 muestra tres casos diferentes para grandes desplazamientos, el desplazamiento crítico, y pequeños desplazamientos. En el desplazamiento crítico la antena alcanza su velocidad máxima e inmediatamente después decrece hasta hacerse 0.

La distancia recorrida por el radiotelescopio en grados se obtiene integrando la expresión 41 y aplicando las condiciones de contorno adecuadas. Sea δ la distancia recorrida:

$$\delta = \int \frac{v_{max}}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right) dt = \frac{v_{max}}{2} \left(t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right) + \delta_0 \quad (42)$$

Cuando $t = 0$ se verifica que $\delta = 0$ y por tanto:

$$0 = \delta_0 \quad (43)$$

Por tanto la distancia recorrida por el radiotelescopio en un tiempo t en pequeños desplazamientos $T < T_{max}$ es:

$$\delta = \frac{v_{max}}{2} \left(t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right) \quad (44)$$

Como anteriormente la expresión anterior varía si se realizan grandes desplazamientos en cuyo caso el recorrido hecho por la antena en un tiempo t es:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{V_{max}}{2} \left(t - \frac{T_{max}}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{max}}t\right) \right) & / t \in [0, T_{max}/2] \\ \delta &= \frac{T_{max}V_{max}}{4} + V_{max} \left(t - \frac{T_{max}}{2} \right) & / t \in]T_{max}/2, \Delta t - T_{max}/2[\\ \delta &= \frac{V_{max}}{2} \left(t + \Delta t - T_{max} - \frac{T_{max}}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{max}}(t - \Delta t + T_{max})\right) \right) & / t \in [\Delta t - T_{max}/2, \Delta t] \end{aligned}$$

donde Δt es el tiempo necesario para la antena llegue a su punto de destino.

La figura 6 muestra el recorrido realizado por la antena a lo largo del tiempo para grandes desplazamientos, un desplazamiento crítico, y pequeños desplazamientos. En el desplazamiento crítico ($T = T_{max}$) la antena alcanza su velocidad máxima e inmediatamente después decrece hasta hacerse 0.

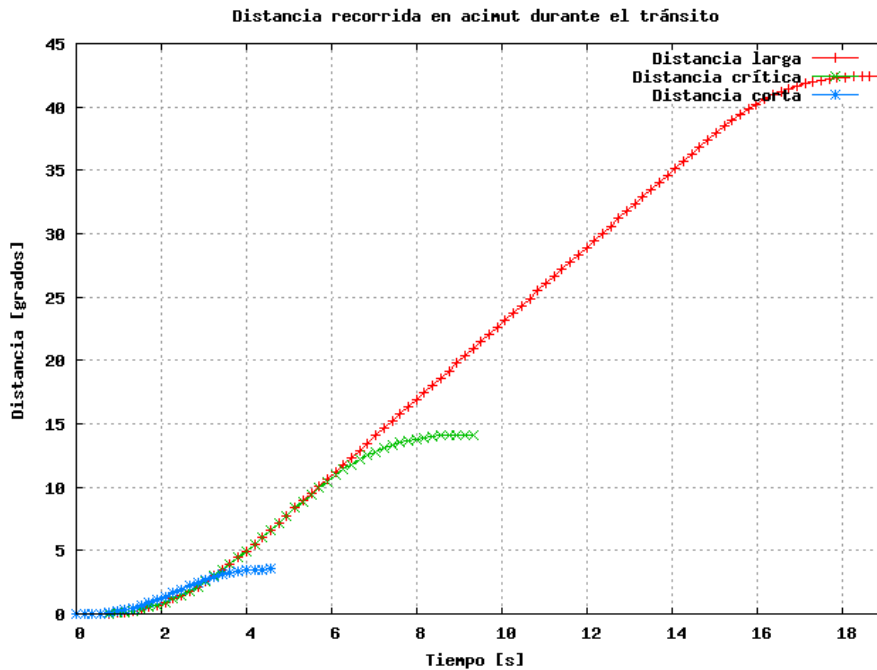


Figura 6: Recorrido realizado por la antena durante el tránsito para grandes distancias, distancia crítica y pequeñas distancias.

La distancia crítica que distingue lo que hemos dado en llamar desplazamientos grandes y pequeños es aquella en la que la velocidad de tránsito se incrementa hasta alcanzar su valor máximo y cuando lo ha alcanzado decrece hasta hacerse nula. La distancia crítica δ_{max} es:

$$\delta_{max} = \frac{V_{max}}{2} T_{max} = \frac{\pi V_{max}^2}{2 A_{max}} = A_{max} \frac{T_{max}^2}{2\pi} \quad (45)$$

que en el caso de acimut y elevación es:

$$\delta_{az}^{max} = 14,137^\circ \quad (\text{Az.}) \quad (46)$$

$$\delta_{el}^{max} = 1,570^\circ \quad (\text{El.}) \quad (47)$$

Por tanto la distancia mínima en la que la antena alcanza su máxima velocidad es cuando $t = T_{max}/2$:

$$\frac{\delta_{az}^{max}}{2} = 7,068^\circ \quad (\text{Az.}) \quad (48)$$

$$\frac{\delta_{el}^{max}}{2} = 0,785^\circ \quad (\text{El.}) \quad (49)$$

Estos valores son superiores al caso en el que la aceleración fuera constante y no dependiera del tiempo. El tiempo necesario para que la velocidad en acimut sea $3^\circ/\text{s}$ con aceleración constante de $1^\circ/\text{s}^2$ es 3 segundos y de 1 segundo para que la velocidad de elevación sea $1^\circ/\text{s}$. Por tanto el recorrido hecho en ese tiempo es:

$$\frac{\delta_{az}^{MAX}}{2} = \frac{1}{2}3^2 = 4,5^\circ \quad (\text{Az.}) \quad (50)$$

$$\frac{\delta_{el}^{MAX}}{2} = \frac{1}{2}1^2 = 0,5^\circ \quad (\text{El.}) \quad (51)$$

Para poder construir las observaciones con el radiotelescopio es conveniente conocer el tiempo de tránsito entre dos posiciones cualesquiera. Sean δ_{az} , y δ_{el} la separación en acimut y elevación respectivamente en grados sexagesimales:

- Si $\delta_{az} \leq \delta_{az}^{max}$,

$$\Delta t_{az} = \sqrt{2\pi\delta_{az}} \quad (52)$$

- Si $\delta_{el} \leq \delta_{el}^{max}$,

$$\Delta t_{el} = \sqrt{2\pi\delta_{el}} \quad (53)$$

- Si $\delta_{az} > \delta_{az}^{max}$,

$$\Delta t_{az} = \sqrt{2\pi\delta_{az}^{max}} + \frac{\delta_{az} - \delta_{az}^{max}}{V_{max}(az)} \quad (54)$$

- Si $\delta_{el} > \delta_{el}^{max}$,

$$\Delta t_{el} = \sqrt{2\pi\delta_{el}^{max}} + \frac{\delta_{el} - \delta_{el}^{max}}{V_{max}(el)} \quad (55)$$

El tiempo de tránsito será el máximo de los tiempos de tránsito en acimut y elevación:

$$\Delta t = \text{máx}(\Delta t_{az}, \Delta t_{el}) \quad (56)$$

La figura 7 muestra los tiempos de tránsito entre dos posiciones que difieren sólo en acimut o en elevación. Para calcular el tiempo de tránsito en el caso en el que difieren en acimut y elevación se debe hallar el máximo para cada eje. Para distancias pequeñas el tiempo de tránsito aumenta muy rápidamente. Por ejemplo $\Delta t = 0,04$ s para 1 segundo de arco, $\Delta t = 0,3$ s para 1 minuto de arco y $\Delta t = 2,5$ s para 1 grado.

8. Uso de las interpolaciones para el seguimiento simple de astros

El seguimiento de las fuentes se hará enviando una tabla en ascensión recta y declinación al ACU. El ACU realizará los cálculos correspondientes para obtener el acimut y la elevación a partir de las coordenadas ecuatoriales y del tiempo. Dado que el ACU debe determinar las coordenadas en cualquier momento el tipo de interpolación que se elige es suave y puede ser Newton, Lagrange o Splines.

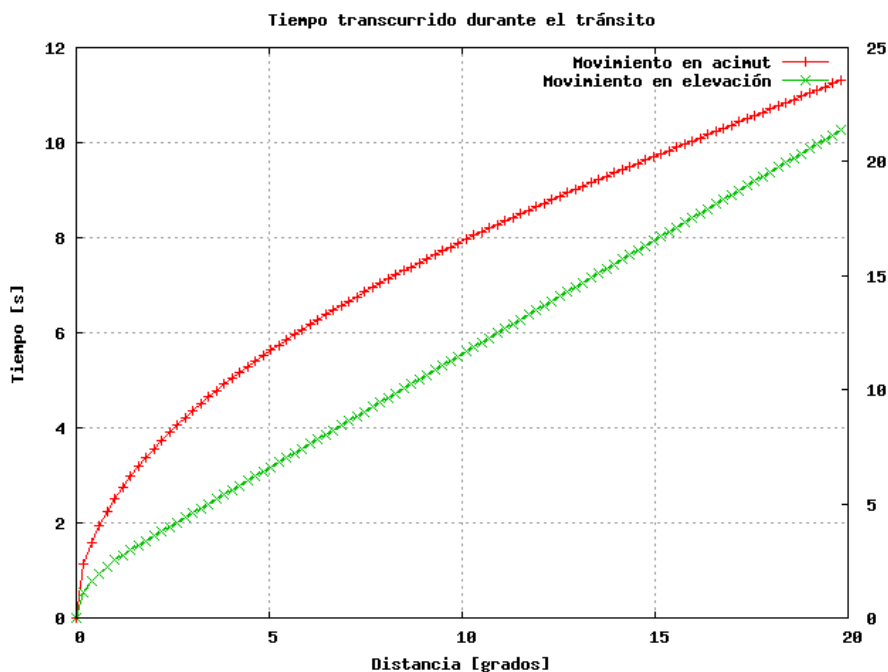


Figura 7: Tiempos de tránsito entre dos puntos para los que sólo cambia el acimut o la elevación.

8.1. Astros del sistema solar

Las fuentes situadas en el sistema solar mudan sus coordenadas ecuatoriales con el tiempo. Mercurio es el planeta con un movimiento medio diario más acusado (aproximadamente 2 grados) seguido de Venus (0,5 grados) (Planesas, 2005). El resto de los planetas muestran movimientos inferiores a 0,5 grados por día. Los movimientos de los planetas en el cielo son más acusados en las conjunciones superiores, cuando el planeta se encuentra entre el Sol y La Tierra y el movimiento es transversal. Esta información se puede encontrar en las primeras páginas del Anuario Astronómico del Observatorio Astronómico Nacional (P. Planesas). El cuerpo celeste con un movimiento más complejo es La Luna con un movimiento sidéreo medio diario de 13 grados (Planesas 2005). Las figuras 8, 9 y 10 muestran la ascensión recta y declinación aparentes de Mercurio, Venus y La Luna en un intervalo de 10 días desde Los Angeles (EEUU) en función del tiempo con una resolución temporal de 1 hora.

Para poder estimar cual es la separación mínima entre los posiciones que se debe ofrecer para obtener la interpolación se ha comparado la posición real de Mercurio, Venus y La Luna con la obtenida por interpolación empleando 5 puntos equiespaciados y variando dicho equiespaciamiento. Esta comparación se ha realizado en ascensión recta y declinación empleando los métodos de interpolación de Lagrange y Newton.

La figura 11 muestra las coordenadas reales e interpoladas de Mercurio empleando 5 valores equiespaciados 22 horas (24h, 46h, 68h, 90h, 112h) donde las unidades son horas y el origen son las 0 horas del 1 de Junio de 2005. En la gráfica no se han representado los 5 valores empleados para la interpolación. La resolución de la gráfica no permite distinguir las diferencias entre los

8 USO DE LAS INTERPOLACIONES PARA EL SEGUIMIENTO SIMPLE DE ASTROS17

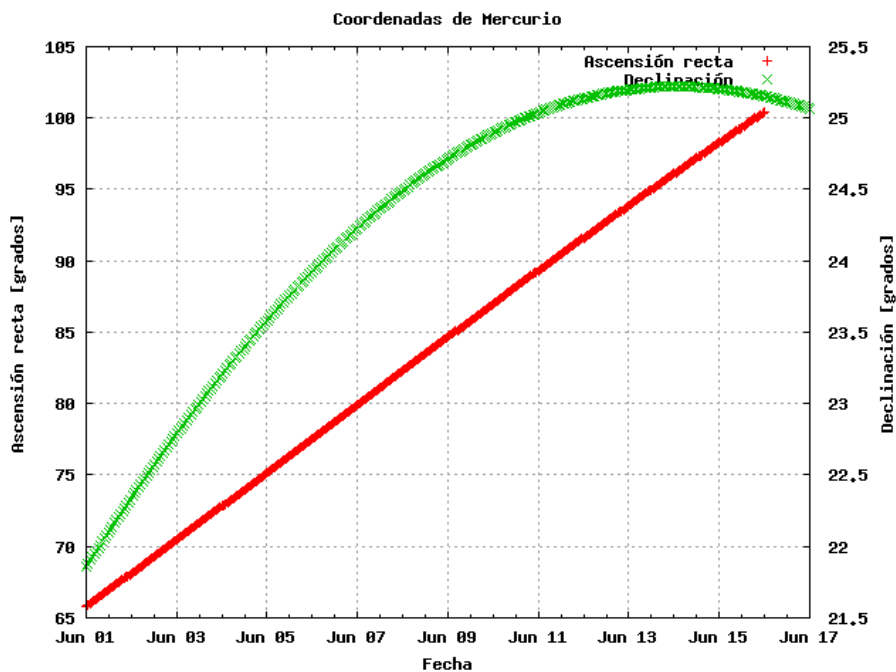


Figura 8: Coordenadas ecuatoriales de Mercurio durante 10 días entre el 1 y el 10 de Junio de 2005 desde Los Angeles. La resolución de la gráfica es de 1 hora.

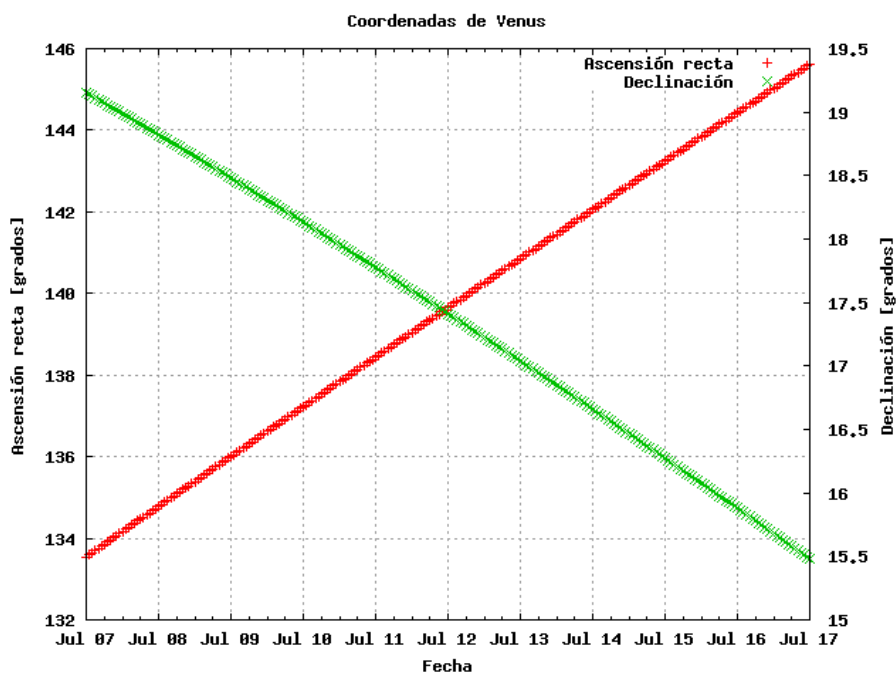


Figura 9: Coordenadas ecuatoriales de Venus durante 10 días, entre el 10 de Julio de 2005 y el 17 de Julio de 2005 desde Los Angeles. La resolución de la gráfica es de 1 hora.

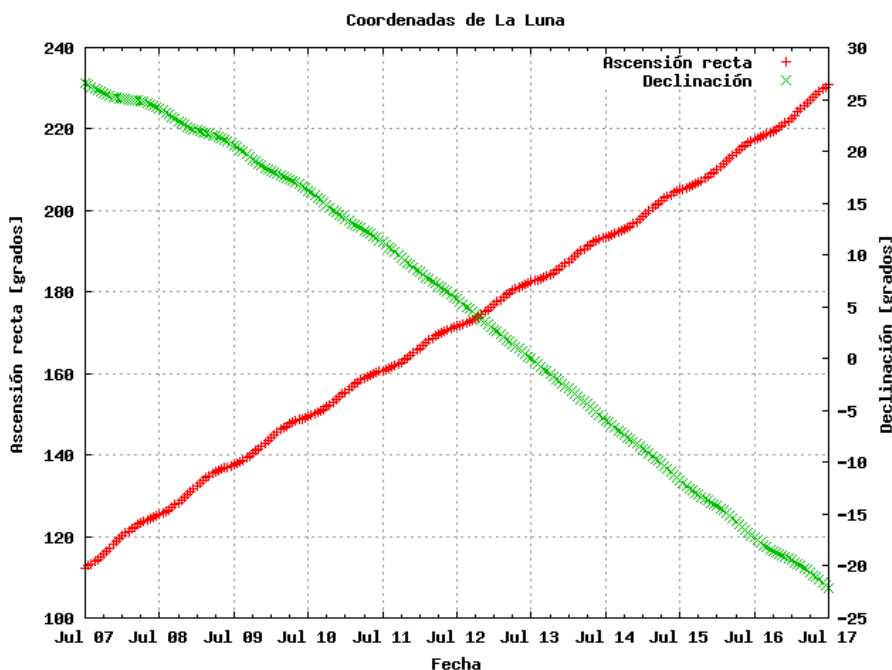


Figura 10: Coordenadas ecuatoriales de La Luna durante 10 días, entre el 10 de Julio de 2005 y el 17 de Julio de 2005 desde Los Angeles. La resolución de la gráfica es de 1 hora.

valores interpolados y los reales, ya que para este valor del espaciamiento el error cuadrático medio es de $1,1 \cdot 10^{-3}$ grados en declinación y $7 \cdot 10^{-4}$ grados en ascensión recta.

La figura 12 muestra el error cuadrático medio cometido en el cálculo de Mercurio para diferentes valores de equiespaciamento. Como se puede apreciar las interpolaciones de Newton y de Lagrange producen los mismos resultados. El máximo error cuadrático medio admisible es 0,5 segundo de arco $1,3 \cdot 10^{-5}$ grados, que en el caso de Mercurio se alcanza en .7 horas en ascensión recta y 10 horas en declinación, y en el caso de Venus se alcanza en 9 horas en ascensión recta y 12 horas en declinación. Por tanto un equiespaciamento de **7 horas** es el límite máximo que admitiremos para interpolar las posiciones ecuatoriales aparentes de los planetas.

La figura 13 muestra las coordenadas reales e interpoladas de Venus empleando 5 valores equiespaciados 22 horas (168.0, 190.0, 212.0, 234.0, 256.0) donde las unidades son horas y el origen son las 0 horas del 1 de Julio de 2005. En la gráfica no se han representado los 5 valores empleados para la interpolación. La resolución de la gráfica no permite distinguir las diferencias entre los valores interpolados y los reales, ya que para este valor del espaciamiento el error cuadrático medio es de $6 \cdot 10^{-4}$ grados en declinación y 10^{-3} grados en ascensión recta.

La tabla 1 resume los errores cometidos en ascensión recta y declinación para Mercurio y Venus utilizando diferentes intervalos de interpolación.

El máximo error cuadrático medio admisible es 0,5 segundos de arco que en el peor de los casos corresponde a 7 horas. Por tanto un equiespaciamento de **8 horas** es el límite máximo que admitiremos para interpolar las posiciones ecuatoriales aparentes de los planetas.

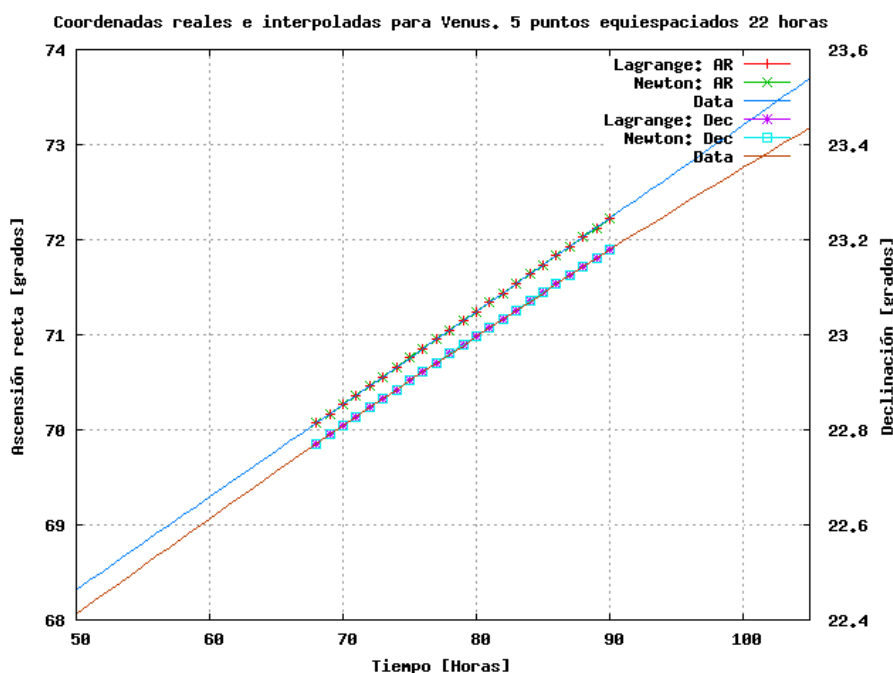


Figura 11: Coordenadas reales e interpoladas de Mercurio empleando 5 valores equiespaciados 22 horas utilizando diferentes intervalos de interpolación y los métodos de Lagrange y de las diferencias finitas hacia delante de Newton. El origen del eje de coordenadas es el 1 de Junio de 2005. Las líneas continuas representan los datos reales de ascensión recta y declinación y las de puntos los interpolados. No se han representado los 5 puntos (24h, 48h, 68h, 90h, 112h) empleados en la interpolación porque algunos quedan fuera de los límites de la gráfica

Intervalo temporal (h)	Mercurio: $\Delta\alpha$ (")	Mercurio: $\Delta\delta$ (")	Venus: $\Delta\alpha$ (")	Venus: $\Delta\delta$ (")
4	0,05	0,007	0,06	0,007
5	0,13	0,02	0,14	0,01
6	0,15	0,12	0,22	0,07
7	0,13	0,23	0,23	0,16
8	0,80	0,30	0,24	0,30
9	1,7	0,18	1,1	0,36
10	2,5	0,28	2,2	0,19
11	2,3	0,95	2,9	0,32
12	0,8	1,6	2,5	0,95

Cuadro 1: Errores de interpolación en segundos de arco para Mercurio y Venus. El valor es un error cuadrático medio en un intervalo de 10 días.

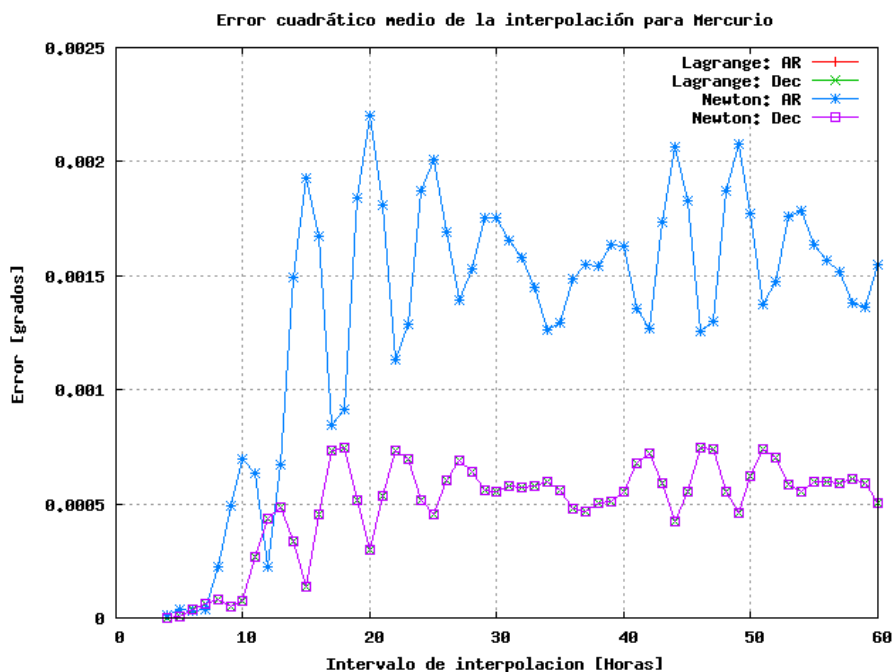


Figura 12: Error cuadrático medio cometido interpolando las posiciones de Mercurio utilizando diferentes intervalos de interpolación y los métodos de Lagrange y de las diferencias finitas hacia delante de Newton.

La figura 15 muestra las coordenadas reales e interpoladas de La Luna empleando 5 valores equiespaciados 22 horas (168.0, 190.0, 212.0, 234.0, 256.0) donde las unidades son horas y el origen son las 0 horas del 1 de Julio de 2005. La diferencia entre los valores interpolados y los reales se pueden apreciar muy fácilmente. Al igual que en el caso de Mercurio y Venus la figura 16 muestra el error cuadrático medio cometido en el cálculo cada 1 hora. Dado que los valores son excesivamente altos y para investigar con detalle el tiempo máximo de equiespaciamiento se ha aumentado la resolución, obteniendo las coordenadas ecuatoriales aparentes de La Luna cada 1 minuto. La figura 17 muestra que 120 minutos (2 horas) es el límite máximo aceptable y 60 minutos es, probablemente la mejor elección.

8.2. Astros externos al sistema solar

Este caso es el más sencillo conceptualmente. Las coordenadas geocéntricas ecuatoriales no varían entre diferentes fechas por lo que el telescopio siempre debe utilizar las mismas coordenadas ecuatoriales. Dado que el ACU necesita 5 puntos para interpolar suministraremos 5 puntos equiespaciados en el intervalo que haya comandado el observador. En el caso en el que el observador no determine el tiempo total de seguimiento de la fuente los extremos del intervalo serán el orto y el ocaso redondeando hasta un valor que permita definir el intervalo total como un múltiplo de 4 minutos. De este modo facilitaremos la división en 4 intervalos de un número entero de minutos.

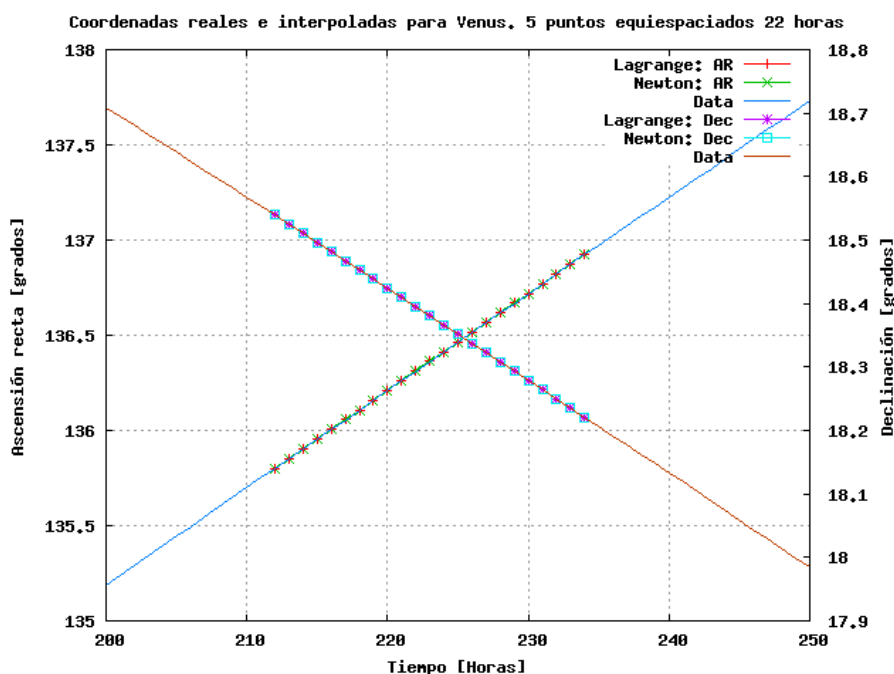


Figura 13: Coordenadas reales e interpoladas de Venus empleando 5 valores equiespaciados 22 horas utilizando diferentes intervalos de interpolación y los métodos de Lagrange y de las diferencias finitas hacia delante de Newton. El origen del eje de coordenadas es el 1 de Julio de 2005. Las líneas continuas representan los datos reales de ascensión recta y declinación y las de puntos los interpolados. No se han representado los 5 puntos (168h, 190h, 212h, 234h, 256h) empleados en la interpolación porque algunos quedan fuera de los límites de la gráfica

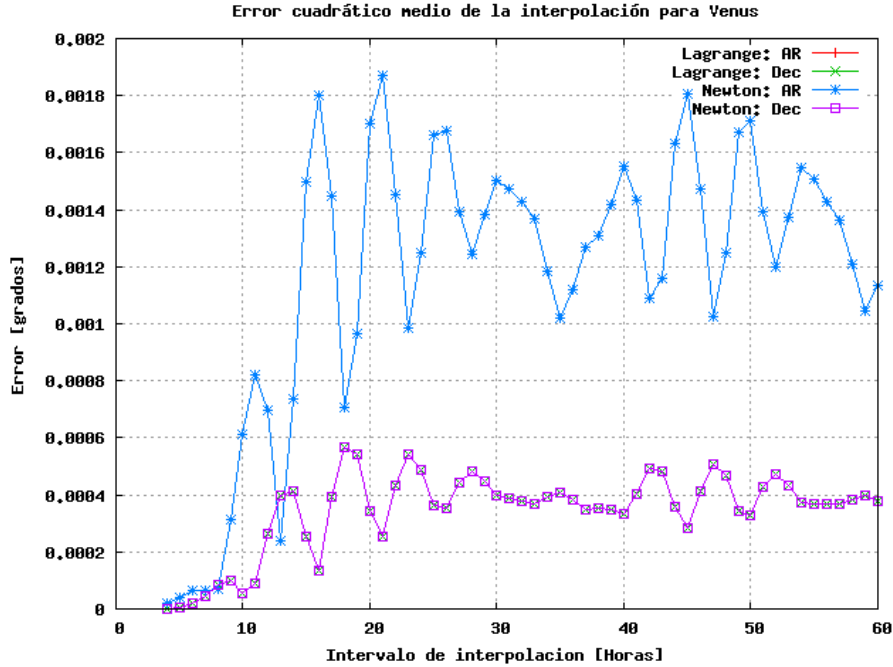


Figura 14: Error cuadrático medio cometido interpolando las posiciones de Venus utilizando diferentes intervalos de interpolación y los métodos de Lagrange y de las diferencias finitas hacia delante de Newton.

Todas las interpolaciones generan una línea recta constante cuando los 5 puntos son iguales como se demuestra a continuación:

- Interpolación de diferencias divididas de Newton. En este caso tenemos que

$$f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \rightarrow [x_i, x_j] = [x_i, x_j, x_k] = 0 \quad (57)$$

Por tanto la ecuación 5 queda:

$$P_N(x) = f_0 \quad (58)$$

y el polinomio vale f_0 en todas las posiciones.

- Interpolación de diferencias hacia delante de Newton. En este caso tenemos que

$$f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \Rightarrow \Delta_i = 0 \quad (59)$$

Por tanto la ecuación 9 queda así:

$$P(x_0 + pd) = f_0 \quad (60)$$

y la función vale f_0 en todas las posiciones.

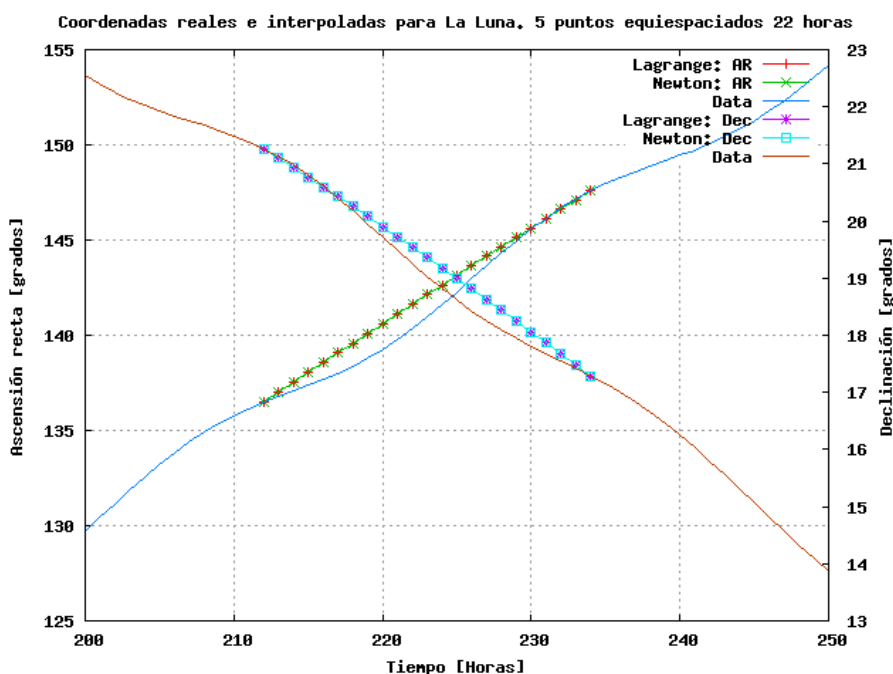


Figura 15: Coordenadas reales e interpoladas de La Luna empleando 5 valores equiespaciados 22 horas utilizando diferentes intervalos de interpolación y los métodos de Lagrange y de las diferencias finitas hacia delante de Newton. El origen del eje de coordenadas es el 1 de Julio de 2005. Las líneas continuas representan los datos reales de ascensión recta y declinación y las de puntos los interpolados. No se han representado los 5 puntos (168h, 190h, 212h, 234h, 256h) empleados en la interpolación porque algunos quedan fuera de los límites de la gráfica

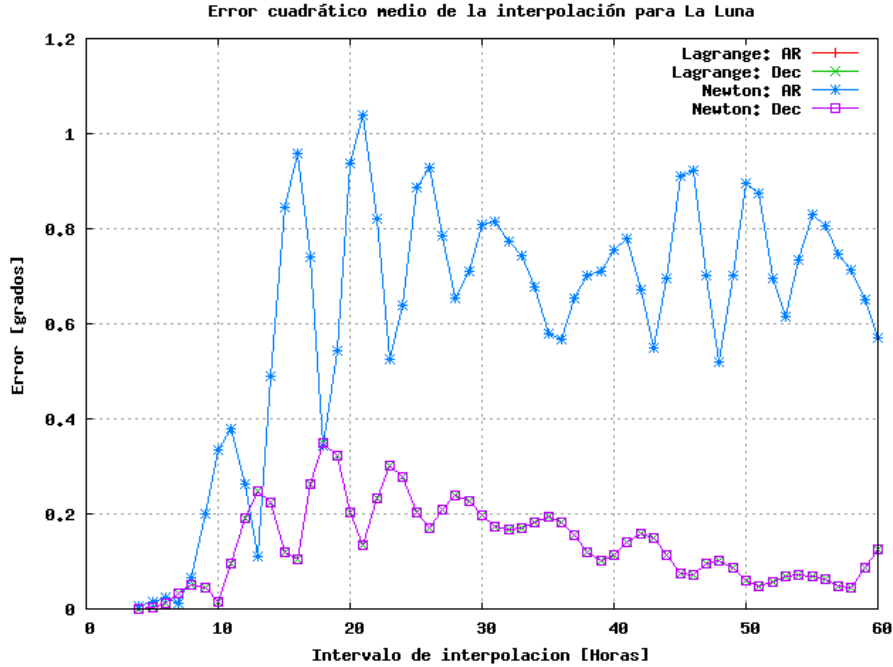


Figura 16: Error cuadrático medio cometido interpolando las posiciones de La Luna utilizando diferentes intervalos de interpolación y los métodos de Lagrange y de las diferencias finitas hacia delante de Newton.

- Interpolación de Lagrange. Empleando la fórmula para cinco puntos que se muestra en la ecuación 19, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + pd) &\simeq \frac{(p^2 - 1)p(p - 2)}{24} f_0 - \frac{(p - 1)p(p^2 - 4)}{6} f_0 + \frac{(p^2 - 1)(p^2 - 4)}{4} f_0 \\
 &\quad - \frac{(p + 1)p(p^2 - 4)}{6} f_0 + \frac{(p^2 - 1)p(p + 2)}{24} f_0 \\
 &= f_0 \left(\frac{(p^2 - 1)p}{24} (p - 2) + (p + 2) \right) - f_0 \left(\frac{p(p^2 - 4)}{6} (p - 1) + (p + 1) \right) \\
 &\quad + f_0 \left(\frac{(p^2 - 1)(p^2 - 4)}{4} \right) \\
 &= f_0 \left(\frac{(p^2 - 1)p^2}{12} - \frac{4(p^2 - 4)p^2}{12} + \frac{3p^2(p^2 - 4) - 3(p^2 - 4)}{12} \right) \\
 &= f_0 \left(\frac{p^4 - p^2 - (p^2 - 4)p^2 - 3p^2 + 12}{12} \right) \\
 &= f_0
 \end{aligned}$$

y la función vale f_0 en cualquier posición.

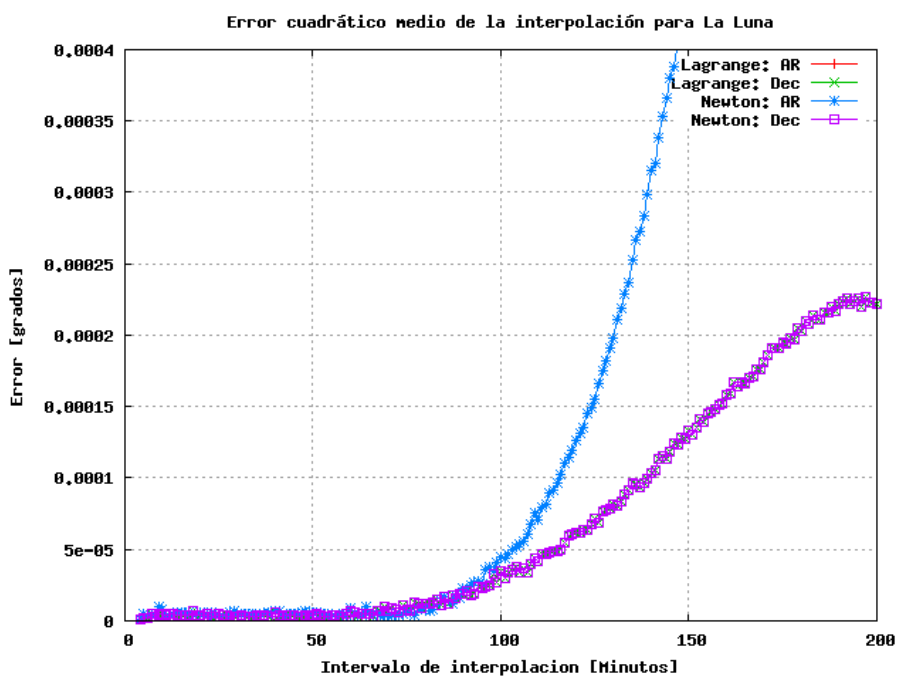


Figura 17: Error cuadrático medio cometido interpolando las posiciones de La Luna utilizando diferentes intervalos de interpolación y los métodos de Lagrange y de las diferencias finitas hacia delante de Newton. La resolución es más fina que en el caso de la figura 16

9. Uso de las interpolaciones para el movimiento superpuesto

Durante el seguimiento de una fuente es posible realizar un movimiento en torno a esta. Para ello se envía una tabla con las posiciones relativas respecto a la fuente en función del tiempo. Si el movimiento es continuo, como en el caso de observaciones 'on-the-fly' se deben emplear interpolaciones suaves y si es discontinuo como en el caso de 'raster' o puntería discreta se debe emplear una interpolación de salto, como la 'stepwise'. En ambos casos es importante determinar el tiempo de tránsito del radiotelescopio. En las interpolaciones suaves no existe tiempo de tránsito aunque se puede considerar como tal el tiempo transcurrido en un cambio brusco de dirección o al detener la antena.

Supongamos el caso en el que la antena se está desplazando en una dirección, por ejemplo acimut, y llegado a cierto punto debe girar en sentido contrario y volver al punto de partida a la misma velocidad. En este caso se puede fabricar una tabla de superposición del siguiente tipo:

$t = 0$	$\delta Az = 0$
$t = 1$	$\delta Az = 1$
$t = 2$	$\delta Az = 2$
.....
$t = k$	$\delta Az = k$
$t = k + \delta_0$	$\delta Az = k$
$t = k + 1 + \delta_0$	$\delta Az = k - 1$
.....
$t = 2k + \delta_0$	$\delta Az = 0$

δ_0 es el tiempo de tránsito y depende de la velocidad previa de la antena. De acuerdo con la expresión 37, el tiempo necesario para detener la antena si esta se desplaza a una velocidad v en grados/s, es:

$$\delta = \pi v \tag{61}$$

Por tanto el tiempo necesario para invertir el sentido y continuar a la misma velocidad absoluta es 2δ . Para mostrar valores concretos supongamos que se está haciendo un mapa 'on-the-fly' con una velocidad de 20 segundos/medio haz. A 90 GHz el tamaño del haz del 40m es de 17 segundos de arco, por tanto $v = 8,5''/20 = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{°/s}$. El tiempo para cambiar de sentido y continuar a la misma velocidad es $\delta = 1,18 \cdot 10^{-4} \pi = 0,7 \text{ ms}$ y la mitad para detener la antena.

En las interpolaciones en escalera la antena se desplaza a la máxima velocidad de un punto a otro acelerando y decelerando en ese intervalo. El tiempo transcurrido en dicho tránsito viene dado por las ecuaciones 52 a 56. Consideremos un caso típico, la realización de un mapa espaciando cada punto medio haz. El tamaño del haz a 90 GHz es de 17 segundos de arco. El tiempo de tránsito entre dos puntos que distan 9 segundos de arco es 0,12 segundos.

Referencias

[1] Abramowitz M & Stegun I. "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, New York, 1972. Pages 877-880.

- [2] Sánchez Guerrero L., “<http://luda.uam.mx/curso2/tema2/interpol.html>”, Universidad Autónoma de Méjico.
- [3] Vanden Berghen F., “<http://iridia.ulb.ac.be/fvandenb/work/dea/node23.html>”, 2003.
- [4] “<http://mpec.sc.mahidol.ac.th/numer/>”
- [5] “<http://www.uv.es/diaz/mn/>”
- [6] P. Planesas “Anuario del Observatorio Astronómico 2005”, Ministerio de Fomento, Instituto Geográfico Nacional, 2005