

**Corrección por refracción atmosférica  
para el radiotelescopio de 40 m del CAY**

Pere Planesas

Informe Técnico CAY 2003-2

2003.06.03



## Cálculo del coeficiente de refracción

Una descripción muy detallada del cálculo de la corrección por refracción atmosférica a frecuencias radio y ópticas se puede ver en el Memorandum 366 de ALMA (Magnum, 2001). En él se compendian las diversas ecuaciones y métodos usados para determinar dicha corrección.

Las relevantes para un radiotelescopio situado en el Centro Astronómico de Yebes (CAY), a una altura de unos 937 m sobre el nivel del mar con posibilidad de funcionar a frecuencias entre 2 y 115 GHz, se describen a continuación.

La corrección por refracción se puede separar en dos términos,  $R_0$  y  $f(E)$ . El primero es un coeficiente que es exclusivamente función de parámetros atmosféricos de superficie, medidos cerca del radiotelescopio. El segundo término depende esencialmente de la altura de observación (también denominada con el anglicismo ‘elevación’) y, en menor medida, de dichos parámetros atmosféricos.

### Término atmosférico

El coeficiente de refracción, para frecuencias menores a 100 GHz y temperatura ambiente entre  $-30$  y  $+30^\circ$  C, se expresa con gran precisión (mejor del 0,5 %) mediante:

$$R_0 = 16,01 \frac{P_s}{T_s} - 1,15 \frac{P_w}{T_s} + 77349 \frac{P_w}{T_s^2}$$

(Crane 1976), que también se escribe como:

$$R_0 = \frac{16,01}{T_s} \left( P_s - 0,072 P_w + \frac{4831 P_w}{T_s} \right)$$

donde:

$R_0$  se expresa en segundos de arco (")

$T_s$  es la temperatura en superficie expresada en grados K

$P_s$  es la presión total en superficie expresada en mbar

$P_w$  es la presión parcial del vapor de agua expresada en mbar y que puede calcularse a partir de  $T_s$  y de la humedad relativa HR mediante:

$$P_w = 6,105 \frac{HR}{100} \left( \frac{T_s}{273} \right)^{-5,31} \exp \left[ 25,22 \left( \frac{T_s - 273}{T_s} \right) \right]$$

La contribución de  $P_s$  a  $R_0$  varía entre  $47''$  y  $56''$  en Yebes, según los datos meteorológicos tomados desde 1999 a 2001 (ver más abajo). La contribución de  $P_w$  a  $R_0$  varía entre  $1''$  y  $18''$ , siendo su contribución relativa entre un 2 % y un 27 %.

### Término en altura

La dependencia con la altura del astro se expresa de distintas maneras, según la precisión que se requiera y según el rango de alturas en que se deba emplear. Cuanto más baja sea la altura mínima más complicada deberá ser esta expresión. Además de las expresiones citadas por Magnum, se pueden encontrar otras en Seidelmann (1992), Meeus (1991) y otras referencias.

La dependencia más elaborada se debe a Yan (1996). Es una expresión que requiere el cálculo de dos parámetros ( $A_1$  y  $A_2$ ) que dependen de  $P_s$ ,  $P_w$  y  $T_s$ , y el de otro parámetro ( $I$ ) que depende de la

altura efectiva de la atmósfera, la cual depende a su vez de la temperatura atmosférica. La precisión lograda es, según el autor, de 0,2" para alturas superiores a 2°.

$$f(E) = \frac{\cos E}{\sin E + \frac{A_1}{I^2 \csc E + \frac{A_2}{\sin E + \frac{13,24969}{I^2 \csc E + 173,4233}}}}, \quad \text{siendo} \quad I \simeq \frac{340}{\sqrt{T_{atm}}} \tan E$$

La dependencia de la altura  $E$  aparece en diversos términos, que requieren el cálculo de cuatro funciones trigonométricas, que pueden ponerse en función de sólo dos de ellas ( $\sin E$ ,  $\cos E$ ). El número de cálculos involucrados es aproximadamente de: 2 funciones trigonométricas, 17 multiplicaciones y 7 divisiones.

## Requisitos en el cálculo de la refracción

Cabe pensar que esta función tan general pueda ser fuertemente simplificada para un lugar dado, teniendo en cuenta la variación de sus parámetros atmosféricos y, posiblemente, unos requerimientos menos estrictos en cuanto a la precisión en el cálculo de la corrección de refracción.

En sus condiciones de uso extremas, el radiotelescopio de 40 m funcionando a 115 GHz tiene un ancho de haz a media potencia (iluminando toda la superficie) de  $\theta_A = 16''$ . El apuntado de un radiotelescopio se considera adecuado si es mejor que  $\theta_A/10$ , lo que en este caso corresponde a 1,6". Dadas las condiciones atmosféricas típicas en Yebe, es previsible que las observaciones a longitudes de onda milimétricas ( $\lambda < 10$  mm,  $\nu > 30$  GHz) se realicen en las mejores condiciones atmosféricas alcanzables y apuntado la antena a alturas superiores a 20°.

El error de apuntado establecido en el contrato de construcción, que contiene las diversas contribuciones mecánicas, gravitatorias y térmicas, establece que el apuntado será mejor que 5" (en el sentido rms) y se espera lograr 3,8". Consecuencia de ello, es que el apuntado sólo alcanzará el valor adecuado, según el criterio antes citado, a frecuencias  $\nu < 50$  GHz. La experiencia muestra que en buenas condiciones atmosféricas (noche, sin viento, etc) y con una buena estrategia de correcciones de apuntado en la dirección concreta de interés se logra un seguimiento de aún menor rms. Tales correcciones de apuntado, típicas en las observaciones a longitudes de onda milimétricas, sirven para compensar el progresivo desajuste del modelo de apuntado, las variaciones instantáneas del equipo (debidas a calentamiento diferencial de la antena, desalineamiento del receptor en uso respecto del de referencia, etc) y también la divergencia entre la corrección por refracción calculada (que supone un cierto modelo de atmósfera) y la necesaria en el instante de observación.

A fin de que errores en la corrección por refracción no degraden el error en el apuntado y en el seguimiento, es necesario que la contribución del error por refracción al error total sea menor de 1,5". El error combinado (en el sentido cuadrático medio) de 3,8" y 1,5" sería entonces de 4,1", que se puede considerar suficiente en el rango  $\nu < 50$  GHz. Una estrategia correctora del apuntado local (o sea, en la zona del cielo de interés y en el momento considerado) debe permitir mejorarlos, tanto en lo referente al modelo de apuntado, en el comportamiento de la antena y en la corrección de refracción.

A frecuencias centimétricas ( $\lambda > 10$  mm,  $\nu < 30$  GHz) será deseable observar a alturas menores de 20°. La exigencia más extrema en cuanto a apuntado se dará observando a 30 GHz, a la que corresponde un ancho de haz de 63", y un error de apuntado que debería ser menor de 6,3". Sustrayendo de este valor el error de 3,8" debido al seguimiento, resulta aceptable un error de 5,0" en el cálculo de la corrección de refracción.

En resumen, las condiciones más extremas de uso del telescopio requieren que el cálculo de la corrección de refracción sea mejor que 1,5" para alturas  $E$  entre  $20^\circ < E < 90^\circ$  y mejor que 5,0"

entre  $2,5^\circ < E < 20^\circ$ .

La altura mínima de  $2,5^\circ$  se ha elegido como un límite razonable, pero todo el estudio que sigue se puede extender hasta  $E = 0^\circ$ , límite mecánico de posicionamiento de la antena en altura.

## Fórmula de Bennett

Una de las fórmulas más sencillas para expresar la dependencia en la altura  $E$  de la corrección por refracción es la encontrada por Bennett (1982), que permite ajustar con una cierta precisión el intervalo de altura  $E$  que va de  $0^\circ$  hasta  $89,9^\circ$  con una sola función trigonométrica. La expresión:

$$f(E) = \cot\left(E + \frac{B_1}{E + B_2}\right)$$

exige el cálculo de una sola función trigonométrica y una división.

Para evitar el problema de dar un valor negativo muy cerca de  $90^\circ$ , altura que, por otra parte, un instrumento altacimutal debe evitar, se puede impedir la observación por encima de  $89,9^\circ$  o de aquella altura en que el seguimiento de la antena pierda la precisión requerida. También se puede utilizar la variante:

$$\text{abs}\left[\cot\left(E + \frac{B_1}{E + B_2}\right)\right]$$

En el caso de que la función trigonométrica calculada sea realmente la tangente ( $\cot = 1/\tan$ ) se puede producir un error de programa cuando el argumento valga  $90^\circ$ . Para evitar este problema, se puede usar otra variante:

$$\text{abs}\left[\tan\left(90^\circ - E - \frac{B_1}{E + B_2}\right)\right]$$

Caben dos aproximaciones al uso de esta sencilla fórmula:

1. Determinar unos valores de los parámetros  $B_1$  y  $B_2$  que den una corrección suficientemente buena para todo el intervalo de parámetros atmosféricos habituales en el lugar.
2. Determinar los valores de los parámetros  $B_1$  y  $B_2$  que mejor ajusten la corrección dada por la fórmula de Yan calculada con las condiciones de cada instante.

En el primer caso se podrían determinar los parámetros  $B$  para varias épocas del año o, incluso, para todo el año, dejando que la dependencia en las condiciones atmosféricas aparezca exclusivamente en el coeficiente  $R_0$ .

En el segundo caso, un programa debería determinar los parámetros  $B$  por ajuste de una función no lineal a los valores dados por la fórmula de Yan para el rango de alturas considerado. El valor de los parámetros  $B$  se pasaría al programa que calcula la corrección, pudiendo ser éste el programa ACU, que no se vería recargado dado que sólo debería evaluar una función trigonométrica.

Conviene recordar de nuevo que la corrección por refracción calculada mediante fórmulas (sea la sencilla de Bennett o la complicada de Yan) tiene el mismo papel que el modelo de apuntado: se trata de una buena aproximación que no elimina la necesidad de realizar, en determinadas circunstancias, una corrección local instantánea del apuntado. Es una operación típica en una observación radioastronómica, que debe realizarse al menos cada dos horas cuando se trabaja a longitudes de onda milimétricas.

Para examinar la viabilidad de ambas aproximaciones he realizado el cálculo de los parámetros  $A$  y los  $B$  para las largas secuencias de valores medidas mediante las estaciones meteorológicas en Yebes. En total se han utilizado unas 300.000 medidas.

## Valores de los parámetros atmosféricos

### Epoca 1982-1987

En el Informe Técnico del CAY 1987-5 (Planesas et al) se realizó una compilación de los datos tomados con una estación meteorológica clásica de valores tales como la temperatura, humedad relativa y recorrido del viento. Los valores de temperatura y humedad relativa, que son los relevantes para calcular la refracción atmosférica, fueron obtenidos por inspección visual de registros semanales. Por ello, sólo son relevantes los valores medios. Además, los valores de la humedad relativa no han sido corregidos de la presencia de lluvia (que ocasiona el que alcance un valor del 99 %, que realmente indica una atmósfera saturada de vapor de agua), a pesar de que en tales condiciones no se realizan observaciones radioastronómicas. En consecuencia, el valor medio de la humedad relativa debe ser tomado como una cota superior al valor medio en los intervalos útiles para la observación.

Se calcularon medias mensuales para el intervalo de algo más de 5 años que va de marzo de 1982 a junio de 1987. El promedio de dichas medias mensuales es:

Magnitud	Valor promedio
Temperatura	12,8 °
Humedad relativa (HR)	61 %
Velocidad del viento	11,5 km/h =3,2 m/s

Las medias mensuales de temperatura y humedad relativa fueron:

	<i>T</i> °C	HR %		<i>T</i> °C	HR %
Enero	3,9	74	Febrero	5,1	69
Marzo	7,8	62	Abril	10,0	62
Mayo	13,4	60	Junio	19,6	54
Julio	23,9	44	Agosto	21,8	49
Septiembre	19,7	53	Octubre	14,2	60
Noviembre	8,6	74	Diciembre	5,4	72

### Epoca 1991-1996

La instalación en el CAY de una estación meteorológica digital por parte del Instituto Nacional de Meteorología permitió disponer de datos muy frecuentes (cada 10 minutos) en forma digital. Con ello se pueden obtener valores medios de una manera más cómoda y precisa, eliminando la inspección visual, además de permitir derivar, para cada instante, otros parámetros, como es el coeficiente de refracción.

Los datos que se utilizaron para llevar a cabo el estudio contenido en el Informe Técnico del CAY 1998-3 (García-Burillo et al) cubren un intervalo que va de 1991 a 1996, con numerosas lagunas (faltan aproximadamente la mitad de los meses). Se dispone de un total de 144.520 datos.

Los valores medios y extremos, medidos (T, HR) o calculados (el resto), que nos son relevantes son:

Magnitud	Máximo	Mínimo	Media	Desviación
T (°)	39,3	-8,5	13,3	8,8
HR (%)	99	19	63	20
p.v. agua (mm)	24,0	1,6	9,9	4,0
R <sub>0</sub> (")	69,8	54,2	60,3	2,5
A <sub>1</sub>	0,5660	0,5453	0,5553	0,0038
A <sub>2</sub>	1,2824	1,1832	1,2329	0,0184
I/tan(E)	20,27	18,65	19,49	0,30

## Epoca 1999-2001

Una nueva serie de valores se ha obtenido mediante una estación meteorológica digital adquirida por el Centro Astronómico de Yebes, que proporciona un parámetro necesario antes no disponible: la presión atmosférica total.

Hemos analizado los datos obtenidos en tres años completos, 1999, 2000 y 2001, con un total de 144.351 valores. Los datos de 2002 no han sido usados debido a que presentaban numerosos problemas (saltos, valores nulos o fuera de rango, etc.), cuyo origen hay que investigar y corregir.

Magnitud	Máximo	Mínimo	Media	Desviación
T (°)	37,0	-9,3	12,7	8,5
HR (%)	99	10	63	25
P (mbar)	931,8	885,1	913,4	5,9
p.v. agua (mm)	20,8	0,9	8,9	3,1
$P_d = P - P_w$	925,1	874,7	904,5	
R <sub>0</sub> (")	68,1	51,5	59,5	2,5
A <sub>1</sub>	0,5666	0,5458	0,5555	0,0038
A <sub>2</sub>	1,2845	1,1868	1,2341	0,0179
I/tan(E)	20,30	18,72	19,51	0,29

La presión media del aire seco  $P_d$  concuerda con el dado por la atmósfera estándar para Yebes:

$$P_d = 1013,25 (1 - 0,94/48,0)^{5,7} = 905 \text{ mbar}$$

Como se puede observar, los valores medios de  $T$  y HR concuerdan en los tres periodos. Las temperaturas mínima y máxima medidas en los dos últimos periodos son:  $-9$  y  $+39$ . El 12 de febrero del año 2002 se alcanzó una temperatura de  $-13,2^\circ \text{C}$ .

# Ajustes de la fórmula de Bennett

## Ajuste único

El proceso de los datos ha consistido en generar para cada medida de la estación meteorológica un conjunto de valores de la corrección por refracción mediante la fórmula de Yan, correspondientes a las alturas (en grados) de: 2,5, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 60, 70, 80 y 89. Para ello se ha desarrollado el programa `gen-refrac`.

Como presión del aire seco se ha tomado el valor medio antes determinado:  $P_d = 905$  mbar,

### 1) Ajuste de los datos de 1991-1996:

Se realiza mediante el programa `bennett` (un ordenador a 1 GHz tarda 0,5 ms por ajuste, incluyendo accesos a disco).

Factor multiplicativo de $R_0$	1,004 $\pm$ 0,002
$B_1$	5,929 $\pm$ 0,366
$B_2$	2,459 $\pm$ 0,263
Error máximo	5,2"
Altura del error máximo	3°

Desviaciones con respecto a un único modelo de la fórmula de Bennett usando  $B_1 = 5,9$  y  $B_2 = 2,5$  (programa `comprobacion`):

Rango de alturas (°)	Error máximo (")	Error medio (")
2,5 a 5	15,1	6,5
5 a 10	7,0	2,3
10 a 20	2,7	1,4
20 a 90	1,2	0,7

El error máximo se refiere a la peor discrepancia encontrada tras el ajuste de unos 144.000 conjuntos de datos. La discrepancia media suele ser inferior a la máxima en un factor 2-3.

### 2) Ajuste de los datos de 1999-2001:

Factor multiplicativo de $R_0$	1,004 $\pm$ 0,002
$B_1$	5,913 $\pm$ 0,367
$B_2$	2,453 $\pm$ 0,264
Error máximo	5,7"
Altura del error máximo	3°

Desviaciones con respecto a un único modelo de la fórmula de Bennett usando  $B_1 = 5,9$  y  $B_2 = 2,5$  (programa `comprobacion`):

Rango de alturas (°)	Error máximo (")	Error medio (")
2,5 a 5	19,6	6,4
5 a 10	6,9	2,4
10 a 20	2,7	1,4
20 a 90	1,2	0,7



## Conclusión

Ciñéndonos a los requisitos establecidos antes (corrección mejor que 5" para  $2,5^\circ < E < 20^\circ$  y mejor que 1,5" para  $20^\circ < E < 90^\circ$ ), un análisis más detallado muestra que el ajuste único con la fórmula

$$f(E) = \text{abs}[\tan(90^\circ - E - \frac{5,9}{E + 2,5})]$$

es válido para alturas en el rango  $6^\circ < E < 90^\circ$ .

## Ajuste dato a dato

El resultado de un ajuste individualizado a la dependencia calculada mediante la fórmula de Yan para cada lectura de la estación meteorológica da unos resultados mejores que los anteriores, extendiendo el intervalo de validez del ajuste hasta alturas del orden de  $3^\circ$ .

### 1) Ajuste de los datos de 1991-1996:

Rango de alturas ( $^\circ$ )	Error máximo ( $"$ )
2,5 a 5	6,3
5 a 10	1,9
10 a 20	1,2
20 a 90	1,3

### 2) Ajuste de los datos de 1999-2001:

Rango de alturas ( $^\circ$ )	Error máximo ( $"$ )
2,5 a 5	6,3
5 a 10	1,8
10 a 20	1,3
20 a 90	1,3

## Conclusión

El ajuste de cada una de las lecturas de la estación a fin de determinar los coeficientes  $B$  para el cálculo de la dependencia en la altura  $E$  de la corrección de refracción mejora la eficacia con la que la fórmula de Bennett realiza dicha corrección, respecto del uso de unos coeficientes  $B$  fijos para todo el año. Dicha mejora es aparente ya para  $E < 20^\circ$  y es imprescindible para  $E < 6^\circ$ , extendiendo la bondad de la corrección hasta, al menos, la altura más baja considerada ( $E = 2,5^\circ$ ).

## Conclusión general

Dadas las condiciones atmosféricas de Yebes y los requisitos en cuanto a apuntado del radiotelescopio de 40 m, la corrección por refracción se puede llevar a cabo de manera simple mediante la expresión:

$$R_0 f(E) = \frac{16,01}{T_s} (P_s - 0,072 P_w + \frac{4831 P_w}{T_s}) \text{ abs}[\tan(90^\circ - E - \frac{5,9}{E + 2,5})]$$

donde:

$R_0$  se expresa en segundos de arco (")

$T_s = T + 273,15$  es la temperatura en superficie expresada en grados K

$P_s$  es la presión total en superficie expresada en mbar

$P_w$  es la presión parcial del vapor de agua expresada en mbar y que puede calcularse a partir de  $T_s$  y de la humedad relativa HR mediante:

$$P_w = 6,105 \frac{HR}{100} \left(\frac{T_s}{273}\right)^{-5,31} \exp[25,22 \left(\frac{T_s - 273}{T_s}\right)]$$

$E$  es la altura respecto del horizonte expresada en grados

Esta expresión corrige adecuadamente la refracción para alturas en el rango  $6^\circ < E < 90^\circ$ , a lo largo de todo el año en Yebes.

Para realizar una buena corrección a alturas inferiores a  $6^\circ$  es necesario realizar un ajuste que permita determinar unos valores instantáneos de los parámetros  $B$  (que toman unos valores de 5,9 y 2,5 en la expresión citada). Tal ajuste mejora la corrección en el rango  $2,5^\circ < E < 20^\circ$ .

## Implementación

Si se desea que el programa de control ACU realice la corrección por refracción a cada altura  $E$ , se le deben suministrar tres parámetros ( $R_0$ ,  $B_1$  y  $B_2$ ) a fin de efectuar el cálculo:

$$R_0 \text{ abs}[\tan(90^\circ - E - \frac{B_1}{E + B_2})]$$

El parámetro  $R_0$  debe ser calculado ocasionalmente a partir de la lectura de la estación meteorológica, que genera datos atmosféricos cada 10 minutos. Estos datos deben ser revisados (editados) en cuanto a continuidad respecto de las últimas medidas y en cuanto a que se encuentren dentro de los rangos razonables, para evitar que errores en la lectura o mal funcionamiento de la estación introduzcan datos erróneos. En caso de fallo transitorio en la lectura de algún parámetro se puede decidir usar la última lectura válida o una prolongación suave de la tendencia de la última hora. En caso de fallo prolongado puede ser necesario introducir los valores periódicamente a mano, leyendo un termómetro o registrador. En caso de avería de un medidor, se puede usar un valor típico; por ejemplo, se puede adoptar una presión media del aire seco de  $P_d = 905$  mbar. Convendrá pensar en distintas estrategias según las situaciones que se puedan dar.

Para los parámetros  $B$  se pueden usar valores fijos anuales (5,9 y 2,5) o valores instantáneos, los cuales deben ser calculados por ajuste iterativo de una función no lineal. Cabe también la posibilidad de usar valores estacionales; es decir, pares de valores  $B_1$  y  $B_2$  válidos para cada una de las épocas climáticas.

## Velocidad de cálculo

A fin de comprobar si hay un ahorro sensible en el tiempo de cálculo de la fórmula de Bennett con respecto de la de Yan, hemos escrito (de Vicente y Planesas) un programa en C++ que realiza dichos cálculos, `velo-refraccion.cpp`. Se ha incluido en él, como comparación adicional, la fórmula de Ulich (1981), de apariencia sencilla y que, según dicho autor, da errores menores de 2" para alturas  $E > 3^\circ$ :

$$f(E) = \frac{\cos E}{\sin E + 0,00175 \tan(87,5^\circ - E)}$$

El cálculo basado en la fórmula de Bennett es el más rápido. La fórmula de Ulich tarda el doble y la de Yan el cuádruple.

## Bibliografía

1. Bennett, G.G.: 1982, *The calculation of astronomical refraction in marine navigation*, en *Journal of the Institute of Navigation*, 35, 255. Citada por Meeus y Seidelmann.
2. Crane, R.K.: 1976, *Refraction effects in the neutral atmosphere*, en *Methods of experimental physics*, vol 12, part B, pag 186.
3. García Burillo, S., Fuente, A., Planesas, P.: 1988, *Análisis de datos meteorológicos del CAY*, Informe Técnico CAY 1998-3.
4. Magnum, J.G.: 2001, *A telescope pointing algorithm for ALMA*, ALMA Memo 366.
5. Meeus, J.: 1991, *Atmospheric refraction* en *Astronomical algorithms*, 101-104.
6. Planesas, P., Delgado, L.A., Serra, M., Pérez Murano, F., Zugasti, M.P.: 1987, *Parámetros atmosféricos medidos y determinados en el CAY desde marzo 1982 hasta junio 1987*, Informe Técnico CAY 1987-5.
7. Seidelmann, K.: 1992, *Refraction* en *Explanatory supplement to the astronomical almanac*, 140-145.
8. Ulich, B.L.: 1981, citado por Magnum: *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2.
9. Yan, H.: 1996, *A new expression for astronomical refraction*, AJ 112, 1312.