

ANALISIS CUASIÓPTICO DE BOCINAS CORRUGADAS

Informe Técnico del OAN nº 2001-2

Félix Tercero Martínez, José Antonio López Fernández,
Enrique García Muñoz*

I.- INTRODUCCION.

Las bocinas corrugadas son las más adecuadas como alimentadores en radioastronomía. Esto es debido a su diagrama de radiación altamente simétrico y su baja polarización cruzada. Desgraciadamente, a sus altas prestaciones radioeléctricas se une su complejidad de fabricación. La gran mayoría de ellas no puede realizarse en un taller con instrumentación tradicional y se necesitan procesos de electroformado para su construcción. A medida que aumenta la frecuencia de funcionamiento, las corrugaciones se hacen más pequeñas e incluso la fabricación del molde para electroformado es muy complicado. Por ello, y a partir de longitudes de onda milimétricas, su construcción no es en absoluto un proceso repetitivo.

También el análisis electromagnético de la bocina corrugada parece lo suficientemente complicado. No obstante, debido a la alta gausicidad de su lóbulo principal, su análisis se hace sorprendentemente simple y exacto mediante el empleo de la cuasi-óptica.

En el presente informe desarrollaremos una herramienta de análisis de las bocinas corrugadas empleando métodos cuasi-ópticos. Esta herramienta nos servirá también para estimar las dimensiones de las bocinas corrugadas necesarias para nuestras aplicaciones. Fundamentalmente la iluminación del radiotelescopio de 40 metros.

II.- LA BOCINA CORRUGADA. IDEAS PRINCIPALES.

El principio de operación de las bocinas corrugadas está explicado en diferentes textos [1,2] y no tiene sentido repetirlo aquí. En resumen, puede decirse que las corrugaciones cambian los campos en la bocina de forma que se consiga simetría axial, bajos lóbulos secundarios y baja polarización cruzada.

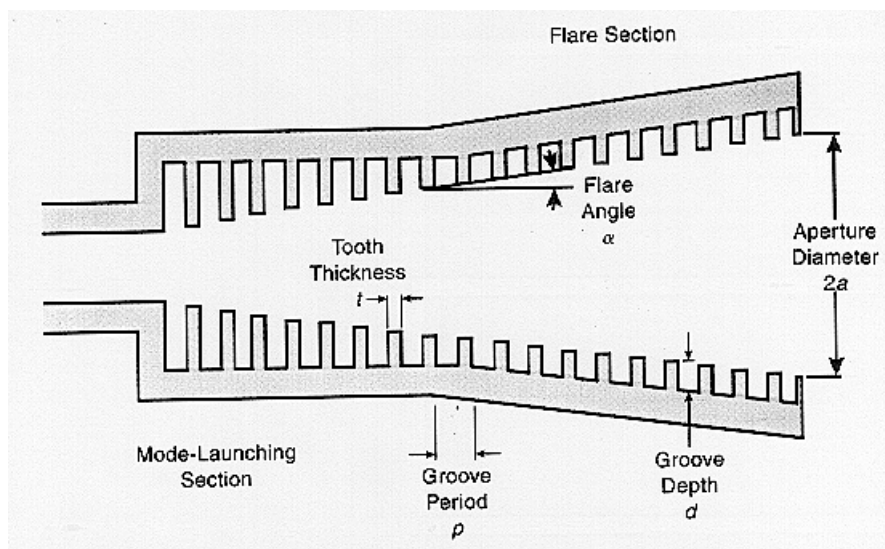


Figura 1: Bocina corrugada.

El requisito para producir un campo radiado simétrico y con baja polarización cruzada es que el campo en la apertura sea lineal. Esto es imposible para guías de onda

monomodo (con dependencia radial y angular). Sólo un modo híbrido puede conseguirlo. Baste para nosotros decir que el modo híbrido es el modo fundamental de la guía circular TE_{11} modificado por el efecto de las corrugaciones.

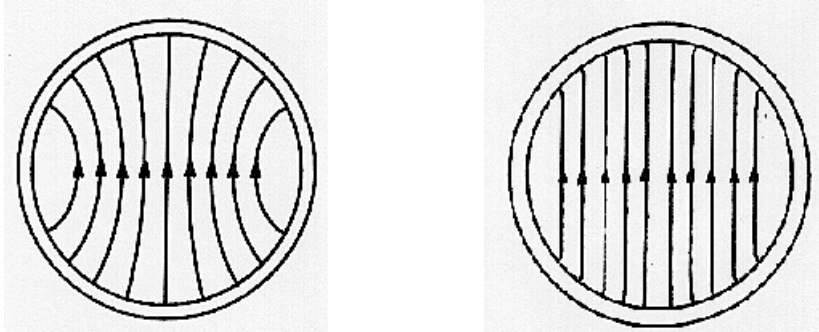


Figura 2: Campo en la apertura. a) Guía circular. b) Guía circular corrugada.

En una guía de ondas circular de radio a , cuando la profundidad de las corrugaciones es un cuarto de la longitud de onda, la variación angular del modo TE_{11} desaparece y el campo tiene sólo dependencia radial. Esta es la condición de modo híbrido balanceado, HE_{11} . Si la guía de onda es suficientemente larga y el periodo de las corrugaciones es al menos $\lambda/3$, la distribución de campo en la apertura es:

$$E(r) = \begin{cases} J_0\left(\frac{2.405 \cdot r}{a}\right) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (1)$$

Como el campo es independiente del ángulo, este tipo de bocina se denomina *alimentador escalar*. Obviamente su diagrama de radiación es simétrico. Bajo la condición híbrida balanceada la polarización es uniforme y su pureza muy alta.

Cuando varía la frecuencia, la reactancia de las corrugaciones cambia y la condición del modo híbrido balanceado deja de cumplirse. El campo ideal dado por la ecuación anterior tiene ahora una pequeña dependencia angular y la pureza de polarización decrece. Esto limita la banda de funcionamiento de la bocina. Para aumentar la banda se han desarrollado diversas técnicas [3].

III.- EXPANSION MODAL DEL CAMPO EN LA APERTURA.

Bajo la condición de modo híbrido balanceado el campo en la apertura de una bocina cónica corrugada, figura 3, de longitud R_h y radio a es:

$$E_{ax}(r) = 0$$

$$E_{ay}(r) = A \cdot J_0^T(k_c \cdot r) \cdot e^{\frac{-i \cdot k_0 \cdot r^2}{2 \cdot R_h}} \quad (2)$$

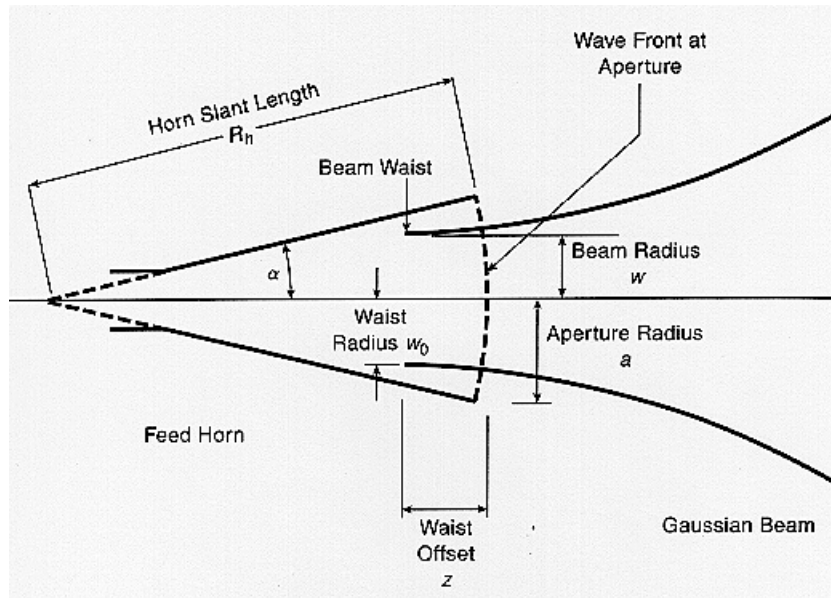


Figura 3: Geometría de la bocina corrugada

donde

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$k_c = \frac{2.405}{a}$$

$$k_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (3)$$

R_h = radio de curvatura de la superficie equifase en la apertura con centro en el vértice

y

$$J_0^T(x) = \begin{cases} J_0(x) & x < 2.405 \\ 0 & x > 2.405 \end{cases} \quad (4)$$

Este campo puede expandirse en una serie de modos ortogonales de Gauss-Laguerre [4]:

$$J_0^T(k_c \cdot r) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cdot L_p^0 \left[\frac{2 \cdot r^2}{W^2} \right] \cdot e^{-\frac{r^2}{W^2}} \quad (5)$$

donde $p=0,1,2,3,\dots$ es el índice radial al que llamaremos orden, $L_p^0(x)$ es el polinomio de Laguerre de índice angular cero y orden p y W es una constante por ahora arbitraria.

Los coeficientes A_N se obtienen teniendo en cuenta que se trata de una serie de funciones ortogonales. Lo que lleva a:

$$A_N = \frac{4}{\left(\frac{W}{a}\right)^2} \cdot \int_0^1 J_0(2.405 \cdot u) \cdot L_N^0 \left[\frac{2 \cdot u^2}{\left(\frac{W}{a}\right)^2} \right] \cdot e^{-\frac{u^2}{\left(\frac{W}{a}\right)^2}} \cdot u du \quad (6)$$

donde $u = r \cdot a$.

El interés de la aproximación cuasi-óptica está en emplear el mínimo número de modos en la aproximación para que la descripción de los campos generados sea lo más simple posible. Esta idea nos lleva a elegir un valor de W/a que maximiza la potencia en el modo fundamental gaussiano o de orden cero.

En [4] se encuentra que el valor de W (waist en la apertura) que maximiza la energía en el modo fundamental es:

$$W = 0.6435 \cdot a \quad (7)$$

correspondiendo a una fracción de potencia de 0.9792 al modo fundamental.

IV.- ANALISIS CON EL MODO FUNDAMENTAL GAUSIANO.

Para encontrar el beam-waist, ω_0 , y su posición z con respecto al plano de apertura de la bocina, conocemos el radio del haz, W waist, y el radio de curvatura, R_h , del frente de fase en la apertura, ver figura 3.

Y encontramos una expresión para el beam-waist del haz de la bocina:

$$\omega_0 = \frac{0.644 \cdot a}{1 + \left[\pi \cdot \frac{(0.644 \cdot a)^2}{\lambda \cdot R_h} \right]^2} \quad (8)$$

y una expresión para la distancia desde el beam-waist al plano de apertura

$$z = \frac{R_h}{1 + \left[\frac{\lambda \cdot R_h}{\pi \cdot (0.644 \cdot a)^2} \right]^2} \quad (9)$$

Estas expresiones pueden reducirse a otras más intuitivas si empleamos el error de fase en el borde de la apertura, β :

$$\beta = \frac{\pi \cdot a^2}{\lambda \cdot R_h} \quad \beta = 2 \cdot \pi \cdot \Delta \quad (10)$$

y encontramos

$$\frac{\omega_0}{a} = \frac{0.644}{(1 + 0.172 \cdot \beta^2)^{0.5}} \quad \frac{z}{R_h} = \frac{1}{1 + 5.81 \cdot \beta^{-2}} \quad (11)$$

De la observación de las fórmulas anteriores, se obtiene que en una bocina corrugada con un error de fase pequeño ($\beta \leq 2$; $\Delta \leq 0.3$) el beam-waist es esencialmente independiente de la frecuencia. Queda sólo determinado por el radio de la apertura. Este tipo de bocina corrugada se llama **limitada en apertura o en difracción**. Y el beam-waist es aproximadamente un tercio del diámetro de la apertura.

Cuando el error de fase en la apertura es grande ($\beta \geq 6$; $\Delta \geq 1$), el beam-waist varía con la inversa de β y se obtiene:

$$\omega_0 = \frac{1.55 \cdot a}{\beta} = \frac{\lambda \cdot R_h}{0.644 \cdot \pi \cdot a} \quad (12)$$

El radio de la apertura y la longitud de la bocina están relacionadas por:

$$a = R_h \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (13)$$

donde α es el ángulo de abocinamiento. Y como el beam-waist y el ángulo de divergencia en campo lejano están relacionados por

$$\omega_0 = \frac{\lambda}{\pi \cdot \theta_0} \quad (14)$$

se obtiene que este último queda definido por el ángulo de abocinamiento

$$\theta_0 = 0.644 \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (15)$$

A este tipo de bocinas se les llama **limitadas en ángulo de abocinamiento** o de **ángulo ancho**.

El análisis de una bocina corrugada con el modo fundamental gaussiano se realiza en el apéndice I.

Como estamos tratando con haces paraxiales. La formulación anterior tiene un margen donde es válida. La restricción general

$$\omega_0 \geq 0.9\lambda \quad (16)$$

resulta en que las bocinas limitadas en apertura para las cuales el análisis anterior es válida deben tener un diámetro de la apertura mayor que 2.8λ . Para bocinas limitadas en ángulo de abocinamiento, esto se traduce en un ángulo de abocinamiento menor que 31° .

V.- ANALISIS CON MODOS DE ORDEN SUPERIOR: BME.

El modo fundamental gaussiano incluye el 98% de la potencia y nos ofrece una representación razonable del lóbulo principal del diagrama de radiación de bocinas corrugadas con error de fase arbitrario. Para obtener información sobre lóbulos secundarios se necesita extender el análisis con los modos de orden superior. Esto se conoce como la expansión en modos del haz o *BME*. Los valores del waist $W(z)$ y del radio de curvatura $R(z)$ son independientes del orden del modo y se rigen por las ecuaciones conocidas de la propagación del modo fundamental:

$$W(z) = \omega_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{z}{z_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad R(z) = z \cdot \left(1 + \left(\frac{z_c}{z} \right)^2 \right) \quad z_c = \frac{\pi \cdot \omega_0^2}{\lambda} \quad (17)$$

En cambio, el desfase es dependiente del modo,

$$\Phi_p(z) = (2p + 1) \cdot \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_c} \right) + \Phi_{p0} \quad (18)$$

los valores de Φ_{p0} se eligen de manera que no hay desfase entre modos en la apertura

De esta manera se puede obtener el diagrama en campo cercano de la bocina mediante:

$$\Psi(r, z) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(\frac{2}{\pi \cdot W(z)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_p^0 \left(\frac{2 \cdot r^2}{W(z)^2} \right) \times \exp \left\{ -i \left(\left(\frac{k_0 \cdot r^2}{2 \cdot q(z)} \right) + \Phi_p(z) + k_0 \cdot z \right) \right\} \quad (19)$$

$$P(r, z) = \Psi(r, z) \cdot \Psi^*(r, z) \quad (20)$$

En [4] se obtiene una expresión para el campo lejano:

$$\Psi(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(\frac{k_0^2 \cdot a^2}{2 \cdot \pi \cdot F^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \frac{(1 + (0.6435)^4 \cdot \beta^2)}{0.6435^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times L_p^0 \left(\frac{k_0^2 \cdot a^2 \cdot \tan^2 \theta}{2 \cdot \frac{(1 + (0.6435)^4 \beta^2)}{0.6435^2}} \right) \times \exp - \left(\frac{k_0^2 \cdot a^2 \cdot \tan^2 \theta}{4 \cdot \frac{(1 + (0.6435)^4 \beta^2)}{0.6435^2}} \right) \quad (21)$$

El análisis de una bocina corrugada con los modos superiores, *BME*, se realiza en el apéndice II.

VI.- COMPARACION ENTRE BME Y SABOR[5]. CAMPO LEJANO.

De la comparación de ambas aproximaciones para una bocina a 22 GHz con las siguientes dimensiones:

Diámetro: 295.37 mm

Longitud Rh: 3332mm

se obtiene,

Bocina	θ_{-3dB}	$\theta_{-8.7dB}$	θ_{-12dB}
SABOR	1.8455	2.9005	3.4275
BME	1.776	2.979	3.495

En cuanto a los lóbulos secundarios:

Bocina	Nivel 1 st SL	Angulo 1 st SL	Nivel 2 nd SL	Angulo 2 nd SL
SABOR	-20 dB	5°	-33dB	8.2°
BME	-20 dB	5°	-33dB	8.2°

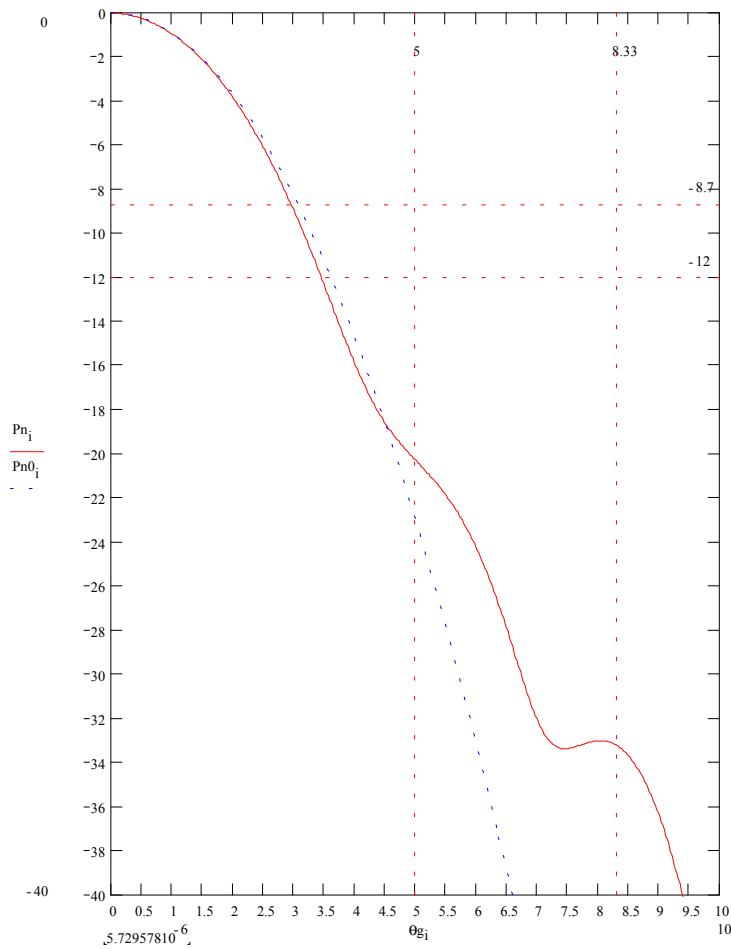


Figura 4: Diagrama de radiación calculado: fundamental ($p=0$) y BME ($p=20$)

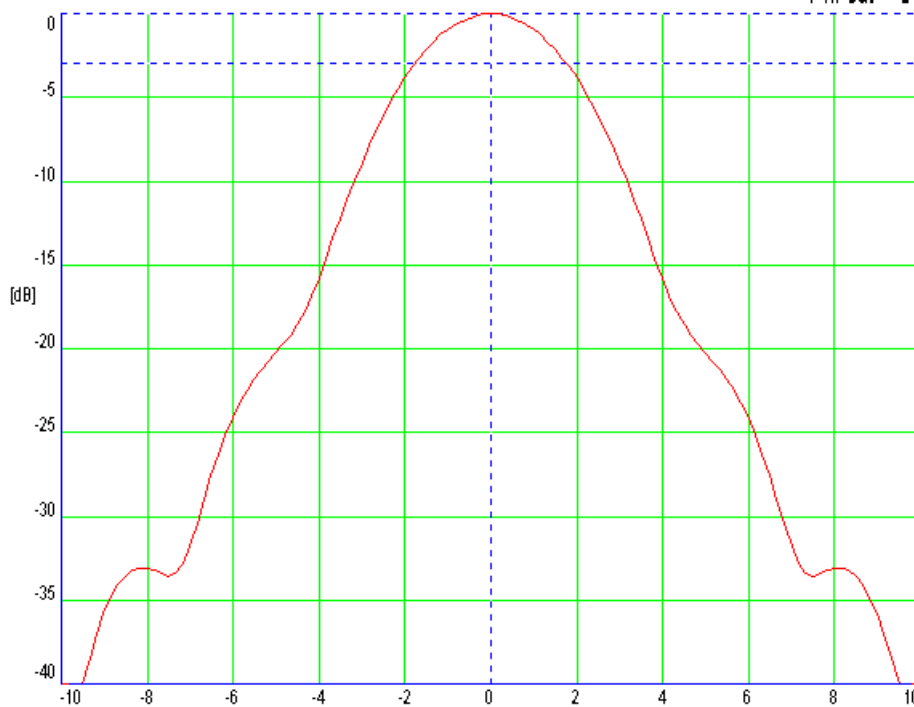


Figura 5: Diagrama de radiación calculado con SABOR.

De las gráficas anteriores se observa que el error en la estimación del ancho de haz con *BME* es del orden del 2% para niveles de 12 dB. Para niveles superiores, por ejemplo -3 dB, este error es del 3.7%.

Del mismo modo se observa que el fundamental nos da una idea bastante aproximada, del mismo orden de porcentaje, del lóbulo principal. Esto no es más que una consecuencia de que el 98% de la potencia va en el modo fundamental gaussiano. Cuando se desee información sobre lóbulos secundarios el fundamental es insuficiente y se requiere *BME*.

Se puede concluir pues que la estimación del diagrama de radiación en campo lejano de una bocina corrugada puede realizarse con *BME*. Un máximo de 10 modos puede ser suficiente. Cuando sólo se desee información sobre el lóbulo superior, o de los niveles por encima de -20 dB, el modo fundamental nos proporciona información suficiente.

VII.- CAMPO CERCANO.

En la figura se presenta el diagrama de radiación en campo cercano, exactamente a una distancia de 467.35mm, la mitad de la distancia confocal. En el eje X se representa el cociente entre la distancia transversal al eje de propagación y el waist. Se observa que, en campo cercano, el modo fundamental ofrece una fiel aproximación hasta niveles superiores a -20 dB. No obstante a niveles altos, la forma del lóbulo principal pierde su gausicidad, aunque mínimamente.

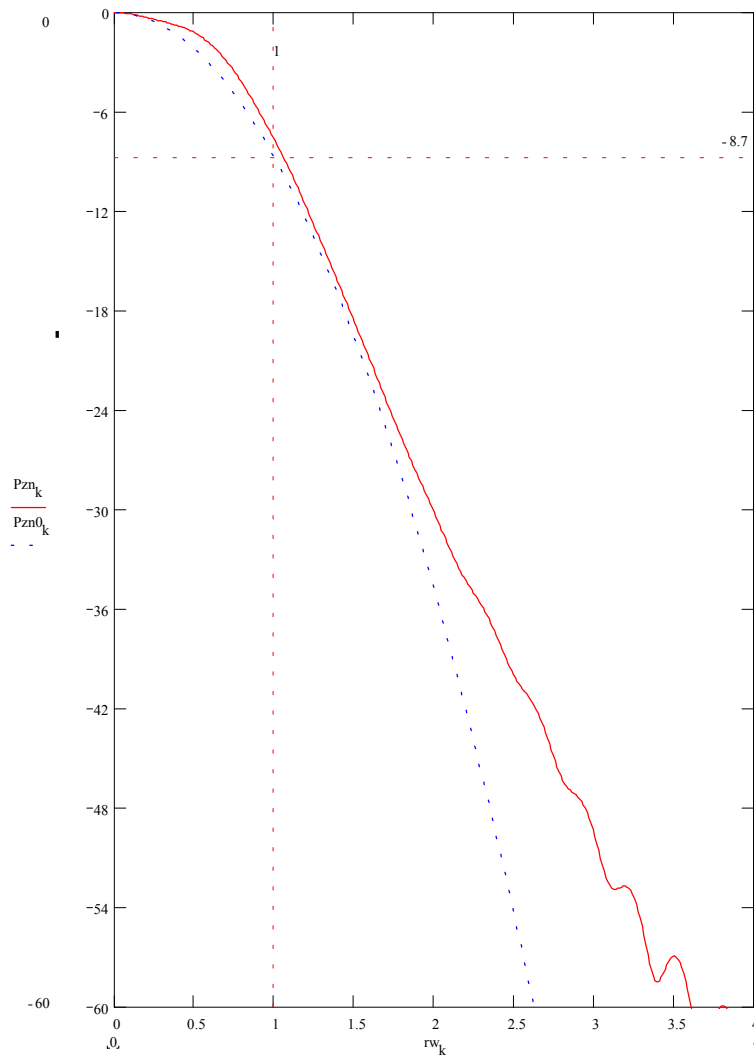


Figura 6: Diagrama de radiación campo cercano a $z_{waist/2}$: fundamental ($p=0$) y BME ($p=20$)

En definitiva se puede concluir que el modo fundamental es una muy buena estimación de los campos lejano y cercano de una bocina corrugada circular. El empleo de modos superiores se justifica, en campo lejano, cuando se requieren los valores de los lóbulos secundarios o el diagrama de radiación a niveles inferiores a -20 dB. El empleo de estos modos en campo cercano se justifica cuando la distancia de interés es muy próxima al beam-waist, $z < z_c/4$. No obstante el modo fundamental es una herramienta directa y precisa para el dimensionamiento de ventanas cuando se emplea este tipo de bocinas.

VIII.- BIBLIOGRAFIA.

- [1] A.D. Olver, “Microwave Horns and feeds”, IEEE Electromagnetic wave series
- [2] P.J.B. Clarricoats, “Corrugated horns for microwave antennas” IEEE Electromagnetics Series
- [3] P.J. Goldsmith, “Quasioptical systems”, IEEE Press
- [4] R.J. Wylde, “Millimetre-wave Gaussian beam-mode optics and corrugated feed horns”, IEE Proceedings, Vol. 131, Pt. H, N°. 4, August 1984
- [5] SABOR, Software para análisis de bocinas y reflectores, ETSIT Madrid

APENDICE I

ANALISIS DE LA BOCINA CORRUGADA EN MODO FUNDAMENTAL

BOCINAS CORRUGADAS Y HACES GAUSIANOS

El presente documento sirve para calcular las dimensiones de una bocina corrugada según la óptica gaussiana. Además se analizará su comportamiento en una determinada banda de frecuencias. Según "Quasipotical systems" IEEE Press, Paul F. Goldsmith

I.- Variables de entrada

$\text{freq} := 22$	Frecuencia central en GHz
$\lambda := \frac{300}{\text{freq}}$	Longitud de onda en mm

OPCION A:

Comenzaremos con la definición del beam waist de salida de la bocina. Lo haremos teniendo en cuenta que la bocina va a formar parte de un sistema cassegrain con una determinada F/D.

$\text{FEDin} := 7.9$	F/D de la bocina
$\text{T} := 12$	Taper en dB del sistema

$\omega_{in} := \frac{2 \cdot \lambda \cdot \text{FEDin} \cdot \sqrt{\frac{\ln(10)}{20}}}{\pi}$	$\omega_{in} = 80.61$	Este es el beam waist de la bocina en milímetros
$z_c := \frac{\pi \cdot \omega_{in}^2}{\lambda}$		Esta es la distancia confocal en milímetros

OPCION B:

Otra opción es calcular la bocina a partir de la directividad. Para ello se supondrá que el haz es puramente gaussiano.

Valor base opción A	$\text{Dir0} := 10 \cdot \log \left[\frac{36190}{\left(2 \cdot \lambda \cdot \frac{180}{\pi^2 \cdot \omega_{in}} \right)^2 \cdot \left(\frac{3}{8.7} \right)} \right]$	$\text{Dir0} = 34.404$	Que es la directividad de la bocina anterior.
---------------------	---	------------------------	---

Elección: $\text{Dir} := \text{Dir0}$

$\text{teta3dB} := \sqrt{\frac{36120}{\frac{\text{Dir}}{10^{10}}}}$	$\text{teta87dB} := \text{teta3dB} \cdot \sqrt{\frac{8.7}{3}}$	$\omega_{in} := \frac{\lambda}{\pi \cdot \tan \left(\frac{\pi \cdot \text{teta87dB}}{180 \cdot 2} \right)}$
$z_c := \frac{\pi \cdot \omega_{in}^2}{\lambda}$		$\omega_{in} = 80.61$

II.- Cálculo de la bocina.

Para una bocina con error de fase D en la apertura

$$j := 1..1001 \quad \Delta_{\max} := 10 \quad \Delta_{\min} := 0.001$$

$$\Delta_j := \frac{j-1}{1000} \cdot (\Delta_{\max} - \Delta_{\min}) + \Delta_{\min}$$

$$\beta_j := 2 \cdot \pi \cdot \Delta_j$$

se obtiene un valor para el radio de la bocina en milímetros

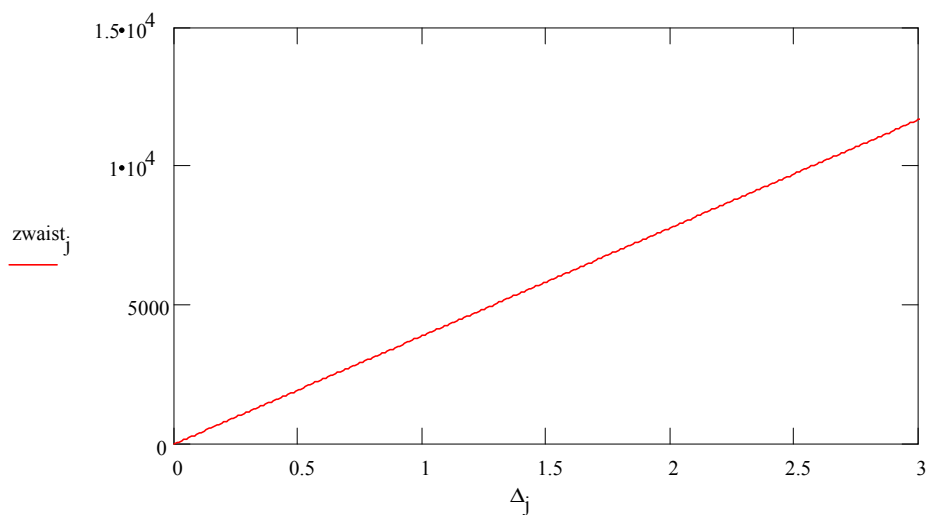
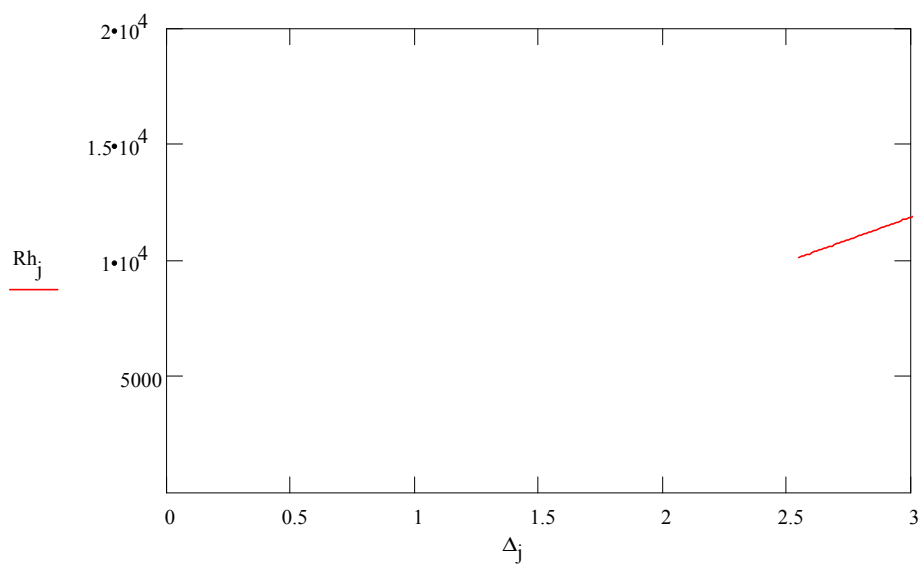
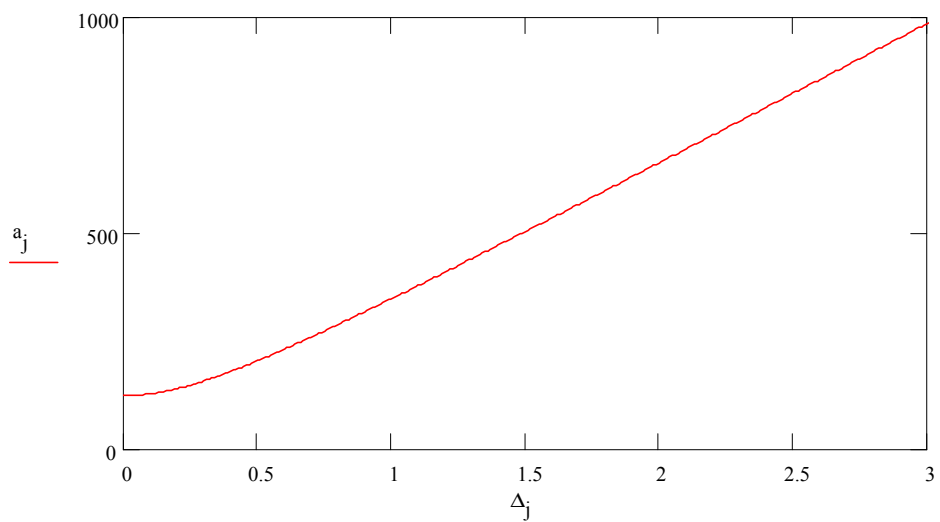
$$a_j := \frac{\omega_{in} \sqrt{1 + 0.171472 \cdot (\beta_j)^2}}{0.6435} \quad \text{el radio} \quad \text{Diam}_j := 2 \cdot a_j \quad \text{es el diámetro}$$

la longitud de la bocina, slant length, es

$$R_{h_j} := \frac{\pi \cdot (a_j)^2}{\beta_j \cdot \lambda}$$

y la posición del beam waist desde el plano de apertura

$$z_{\text{waist}_j} := \frac{R_{h_j}}{1 + 5.8318 \cdot (\beta_j)^{-2}}$$



III.- BANDA DE FUNCIONAMIENTO

Elijamos una solución de entre las anteriores

$$\Delta 0 := 0.24 \quad \beta 0 := 2 \cdot \pi \cdot \Delta 0$$

se obtiene un valor para el radio de la bocina en milímetros

$$a 0 := \frac{\sin \sqrt{1 + 0.171472 \cdot (\beta 0)^2}}{0.6435} \text{ mm} \quad a 0 = 147.685$$

la longitud de la bocina, slant length, es

$$R h 0 := \frac{\pi \cdot (a 0)^2}{\beta 0 \cdot \lambda} \quad R h 0 = 3.332 \cdot 10^3$$

$$\text{y su proyección es } \text{proy} 0 := \sqrt{R h 0^2 - a 0^2} \quad \text{proy} 0 = 3.329 \cdot 10^3$$

y la posición del beam waist desde el plano de apertura

$$z \text{waist} 0 := \frac{R h 0}{1 + 5.8318 \cdot (\beta 0)^{-2}} \quad z \text{waist} 0 = 934.808$$

Definamos una banda de frecuencias cuya frecuencia central s freq = 22 GHz

$$i := 1 .. 201 \quad \Delta f := 6 \quad f \text{freq}_i := \frac{\Delta f}{200} \cdot (i - 1) + \left(\text{freq} - \frac{\Delta f}{2} \right) \quad \text{landa}_i := \frac{300}{f \text{freq}_i}$$

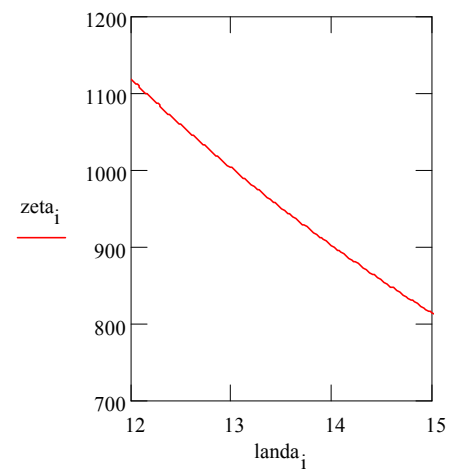
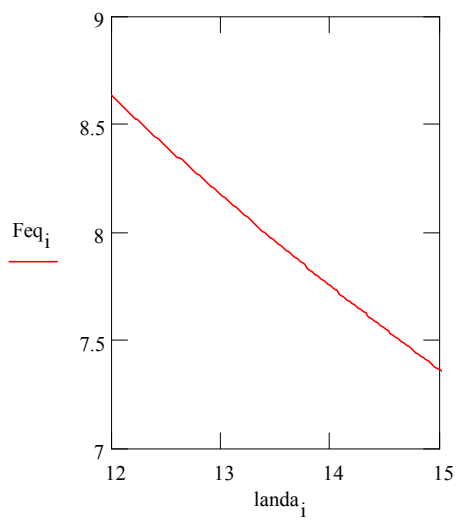
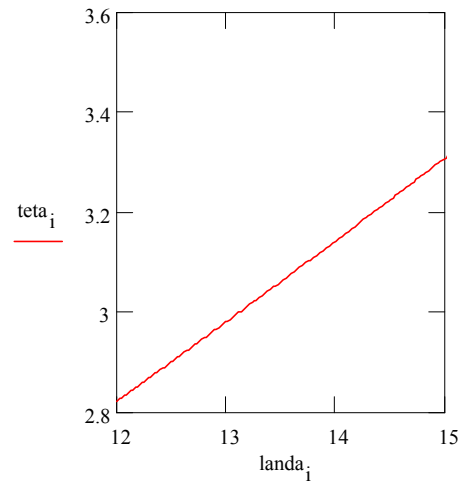
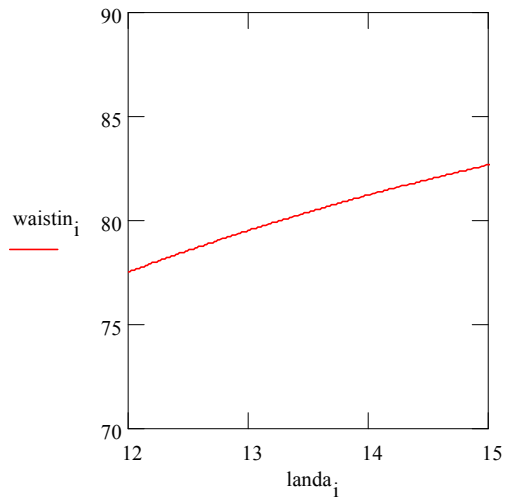
$$\beta \text{eta}_i := \frac{\pi \cdot a 0^2}{\text{landa}_i \cdot R h 0}$$

$$\text{waist}_i := \frac{0.644 \cdot a 0}{\left[1 + 0.172 \cdot (\beta \text{eta}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{variación del beam waist con la frecuencia}$$

$$\text{waist}_{i 0} = 83.414$$

$$z \text{eta}_i := \frac{R h 0}{1 + 5.81 \cdot (\beta \text{eta}_i)^{-2}} \quad \text{variación de la distancia del beam waist al plano de apertura}$$

$$\text{teta}_i := \frac{\text{landa}_i}{\pi \cdot \text{waist}_i} \cdot \frac{180}{\pi} \quad \text{semi ancho del haz radiado} \quad F \text{eq}_i := \frac{\text{waist}_i \cdot \pi}{2 \cdot \text{landa}_i \cdot \sqrt{T \cdot \frac{\ln(10)}{20}}} \quad \text{F/D equivalente del haz radiado}$$



APENDICE II

ANALISIS DE LA BOCINA CORRUGADA CON MODOS SUPERIORES, *BME*.

DISEÑO DE UNA BOCINA CORRUGADA (BEAM WAVE MODE)

I.- INTRODUCCION. DATOS DE PARTIDA.

Vamos a diseñar una bocina corrugada mediante expansión en beam wave modes del campo en la apertura. Seguiremos a R.J: Wylde IEE Proc. 1984.

$$\text{freq} := 22 \quad \lambda := \frac{300}{\text{freq}} \quad \text{esta es la frecuencia y la longitud de onda}$$

OPCION A: Se conoce F/D

$$\text{FEDin} := 7.9 \quad \text{es la F/D de la bocina}$$

$$T := 12$$

$$\omega_{in} := \frac{2 \cdot \lambda \cdot \text{FEDin} \sqrt{T \cdot \frac{\ln(10)}{20}}}{\pi} \quad \omega_{in} = 80.61 \quad z_c := \frac{\pi \cdot \omega_{in}^2}{\lambda} \quad \text{parámetros cuasiópticos}$$

$\beta := 1.5079$ error de fase en la apertura. Este parámetro va a ser determinante en el diagrama de radiación. Existe un valor que produce que el lóbulo principal del diagrama de radiación se asemeje a una gaussiana. El valor óptimo es $\beta = 1.25$, $\Delta = 0.2$.

$$a := \frac{\omega_{in} \sqrt{1 + 0.171472 \cdot (\beta)^2}}{0.6435} \quad \text{el radio} \quad a = 147.683 \quad \text{Diam} := 2 \cdot a \quad \text{es el diámetro}$$

la longitud de la bocina, slant length, es

$$R_h := \frac{\pi \cdot (a)^2}{\beta \cdot \lambda} \quad R_h = 3.332 \cdot 10^3$$

y la posición del beam waist desde el plano de apertura

$$z_{\text{waist}} := \frac{R_h}{1 + 5.8318 \cdot (\beta)^{-2}} \quad z_{\text{waist}} = 934.763$$

OPCION B: Se conoce la geometría

Aqui tenemos la opción correspondiente a cuando se conoce la geometría de la bo

$$a1 := a \qquad Rh1 := Rh$$

***** Se seleccionan aquí:**

$$a := a1 \qquad Rh := Rh1$$

$$\beta := \pi \cdot \frac{a^2}{\lambda \cdot Rh}$$

$$\omega_{in} := a \cdot \frac{0.6435}{\sqrt{1 + 0.171472 \cdot (\beta)^2}}$$

$$z_c := \frac{\pi \cdot \omega_{in}^2}{\lambda}$$

$$z_{waist} := \frac{Rh}{1 + 5.8318 \cdot (\beta)^{-2}}$$

II.- Diagrama de radiación en campo cercano. Sección transversal.

La constante de espacio libre es $k_0 := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$

y la expresión de los modos de Laguerre simétricos es
$$\text{Laguerre}(n, u) := \sum_{l=0}^n \frac{n! \cdot (-u)^l}{n - l! \cdot l! \cdot l!}$$

La distancia a la que queremos calcular el campo es a $z := \frac{z_{\text{waist}}}{2}$

El haz tiene los siguientes parámetros de propagación

$k := 1..501$

$r_{r_k} := (k - 1) \cdot 1$ distancia al eje de propagación.

$$w(z) := \omega_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{z}{z_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad R(z) := z \cdot \left[1 + \left(\frac{z_c}{z} \right)^2 \right] \quad r_{w_k} := \frac{r_{r_k}}{w(z)}$$

$$\Phi(p, z) := (2 \cdot p + 1) \cdot \left(\text{atan} \left(\frac{z}{z_c} \right) - \text{atan} \left(\frac{z_{\text{waist}}}{z_c} \right) \right) \quad \text{desfase modal}$$

$$q(z) := \frac{1}{\left(\frac{1}{R(z)} - \frac{2}{k_0 \cdot w(z)^2} \right) \cdot j} \quad \text{parámetro complejo } q(z)$$

Estos son los coeficientes de los modos:

$p := 0..20$

$$A_p := \frac{4}{w(z_{\text{waist}})^2} \int_0^a J_0 \left(2.405 \cdot \frac{r}{a} \right) \cdot \text{Laguerre} \left[p, 2 \cdot \frac{(r)^2}{(w(z_{\text{waist}}))^2} \right] \cdot e^{-\frac{r^2}{w(z_{\text{waist}})^2}} \cdot r \, dr$$

y la fracción de cada uno de ellos sobre el total es:

$$A_{\text{ptot}} := \sum_{l=0}^{20} (A_l)^2 \quad \text{Frac}_p := \frac{(A_p)^2}{A_{\text{ptot}}}$$

Campo en z :

$$\Lambda(r, z) := \left[\sum_{p=0}^{20} \left[A_p \cdot \left(\frac{2}{\pi \cdot w(z)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Laguerre} \left(p, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \exp \left[\Phi(p, z) \cdot j - \left(\frac{k_0 \cdot r^2}{2 \cdot q(z)} \right) \cdot j \right] \right] \right]$$

Campo correspondiente al fundamental:

$$\Lambda_0(r, z) := \sum_{p=0}^0 A_p \cdot \left(\frac{2}{\pi \cdot w(z)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Laguerre} \left(p, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \exp \left[\Phi(p, z) \cdot j - \left(\frac{k_0 \cdot r^2}{2 \cdot q(z)} \right) \cdot j \right]$$

Diagrama de radiación:

$$\Omega_k := \Lambda(r_k, z) \cdot \overline{\Lambda(r_k, z)}$$

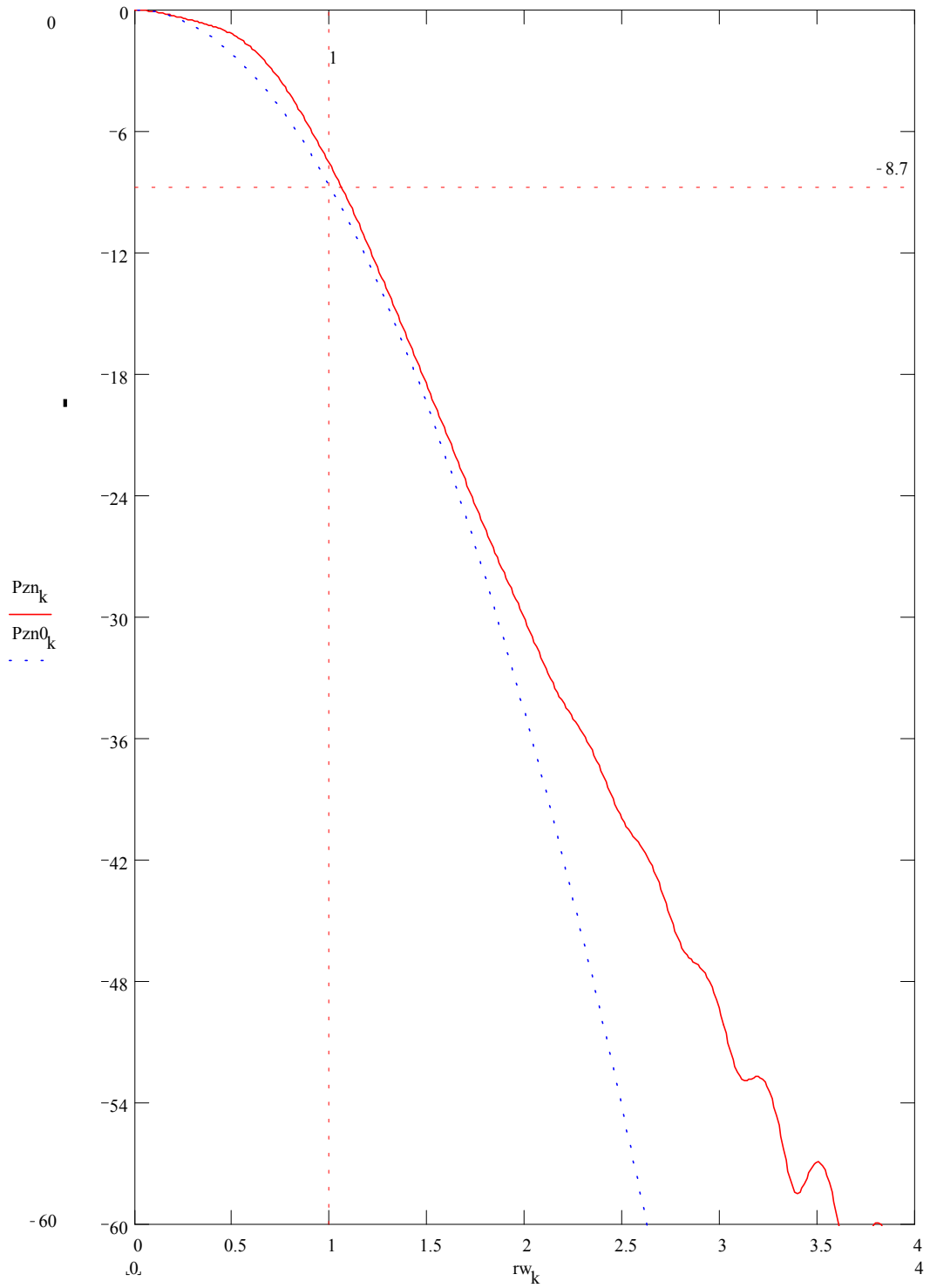
$$\Omega_{0k} := \Lambda_0(r_k, z) \cdot \overline{\Lambda_0(r_k, z)}$$

$$\Omega_{n_k} := \frac{\Omega_k}{\Omega_1}$$

$$\Omega_{n0_k} := \frac{\Omega_{0k}}{\Omega_{0_1}}$$

$$Pzn_k := 10 \cdot \log(\Omega_{n_k})$$

$$Pzn_{0_k} := 10 \cdot \log(\Omega_{n0_k})$$



III.- Diagrama de radiación en campo lejano

Pasemos a calcular el diagrama de radiación en campo lejano:

$$F := \frac{(a)^2 \cdot 8}{\lambda} \quad F = 1.28 \cdot 10^4 \quad \text{esta es la distancia}$$

Barrido en ángulo:

$i := 1 .. 1000$

$$\theta_i := \frac{i-1}{40} \cdot \frac{\pi}{180} + 0.0000001 \quad \theta_{g_i} := \theta_i \cdot \frac{180}{\pi} \quad v_i := k_0 \cdot a \cdot \sin(\theta_i)$$

$$u1_i := \left[\frac{k_0^2 \cdot a^2}{2 \cdot \pi \cdot F^2 \cdot \cos(\theta_i)^2 \cdot \frac{1 + 0.644^4 \cdot \beta^2}{0.644^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad u2_i := \frac{k_0^2 \cdot a^2 \cdot \tan(\theta_i)^2}{2 \cdot \frac{1 + 0.644^4 \cdot \beta^2}{0.644^2}} \quad u3_i := \frac{k_0^2 \cdot a^2 \cdot \tan(\theta_i)^2}{4 \cdot \frac{1 + 0.644^4 \cdot \beta^2}{0.644^2}}$$

Campo radiado:

$$\Psi_i := \left[\sum_{p=0}^{20} \left[A_p \cdot u1_i \cdot \text{Laguerre}(p, u2_i) \cdot \exp(-u3_i) \cdot \exp \left[(2 \cdot p + 1) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{atan}(0.6435^2 \cdot \beta) \right) \cdot j \right] \right] \right]$$

Campo radiado del fundamental:

$$\Psi_0 := \left[\sum_{p=0}^0 \left[A_p \cdot u1_i \cdot \text{Laguerre}(p, u2_i) \cdot \exp(-u3_i) \cdot \exp \left[(2 \cdot p + 1) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{atan}(0.6435^2 \cdot \beta) \right) \cdot j \right] \right] \right]$$

Valores de campo normalizado:

$$En_i := \frac{\Psi_i}{\Psi_1} \quad En0_i := \frac{\Psi_0}{\Psi_1}$$

Valores de potencia normalizados:

$$\Psi_i := \overline{En_i \cdot En_i} \quad \Psi_0 := \overline{En0_i \cdot En0_i}$$

Diagrama de radiación:

$$Pn_i := 10 \cdot \log(\Psi_i) \quad Pn0_i := 10 \cdot \log(\Psi_0) \quad Pn_{139} = -11.92 \quad \theta_{140} = 0.061$$

