

Informe Técnico CAY 1981-3

COMPORTAMIENTO DINAMICO DE LOS SERVOS DEL
RADIOTELESCOPIO DEL CAY

Luis M. Calbet

Alberto Barcia

INDICE

1. Caracterización del servomecanismo. Tipos de errores que introduce.
2. Medición del error de puntería en función de la velocidad.
 - 2.1. Programa VELO3
 - 2.2. Mediciones.
3. Cálculo de la velocidad de la antena en observación.
4. Resumen final.

1. Caracterización del servomecanismo, Tipos de errores que introduce.

El control de posicionamiento de la antena es independiente para azimut y elevación, pero idéntico en ambos casos. El servomecanismo utilizado puede esquematizarse así:

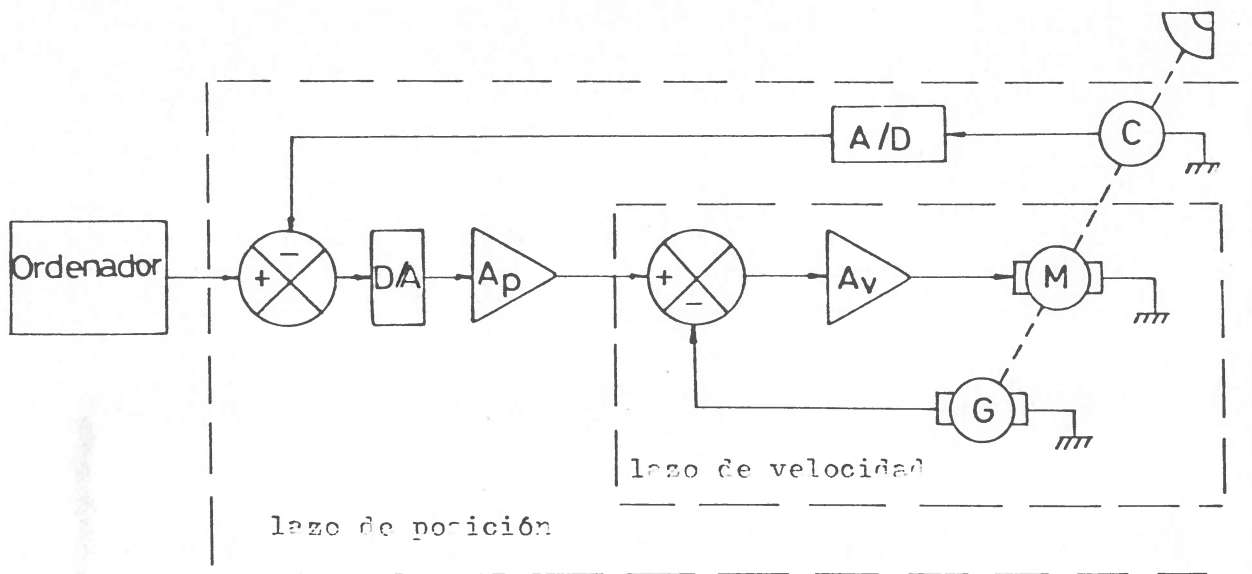


Fig. 1

siendo:

M: motor

G: tacómetro

C: codificador

Ap, Av : amplificador y red de compensación

A/D : convertidor analógico-digital

La diferencia entre el comando y la lectura de la antena, llamada señal de error, produce un voltaje proporcional a su valor que, aplicado al motor, produce el movimiento. El desplazamiento es mayor cuanto mayor es la señal de error. Este servomecanismo funciona de tal manera que la señal de error tiende a ser constante para una velocidad

constant. Los servos que funcionan de esta forma son llamados de tipo I.

Si la antena se mueve a una velocidad constante N , el error tiende a ser constante, de valor N/K_v , donde K_v es la llamada constante de velocidad del servo.

Los errores que introduce este servo se han atribuido a cuatro causas diferentes:

1. Puesta a cero de los transductores de posición de la antena.

Esta puesta a cero se realiza mecánicamente, con la precisión que ello permite. Los offsets residuales pueden medirse e introducirse en el sistema de control, que realizará la corrección automáticamente.

2. Los transductores tienen un error periódico dependiente de la posición que miden. Este error ha sido medido, haciendo su corrección mediante software. Así, para que la antena se coloque en la posición $AE1, EL1$, el ordenador ha de enviar los siguientes comandos:

$$AFC = AE1 + 2.6194 \times 10^{-3} \times \sin (EL1 \times 4.469043 + 0.541052)$$

$$ELC = EL1 + 2.8889 \times 10^{-3} \times \sin (EL1 \times 4.469043 + 1.134464)$$

entendiéndose $AE1, EL1, AFC, ELC$ expresados en grados.

3. Ruido debido al efecto en la señal de error.

Repetimos simplificado el esquema de la figura 1

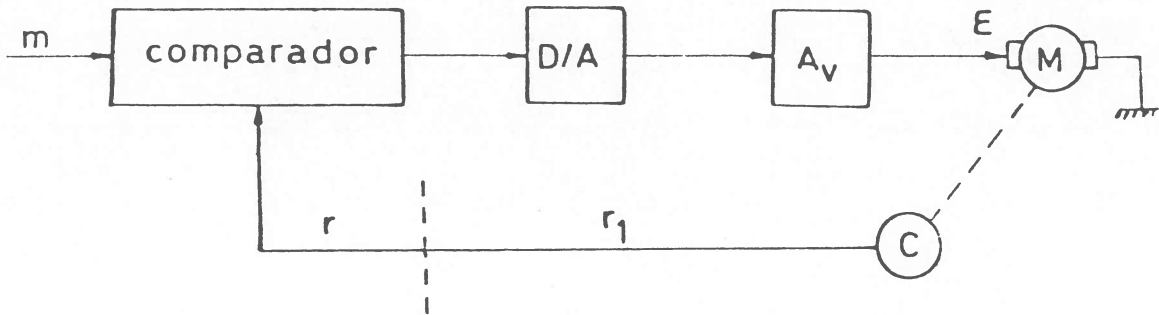


Fig. 2

El amplificador operacional tiene un offset que se suma a la señal de error, haciéndola incorrecta en un valor constante.

Sean:

m : comando dado por el ordenador.

r_1 : posición señalada por el codificador, con precisión de diezmilésimas de grado.

r : posición señalada por el codificador, pero redondeada a milésimas de grado, que es como llega al comparador.

ϵ_0 : offset del operacional.

ϵ : señal de error.

$m = d + c$: el ordenador da el comando de la posición deseada (d), afectada de una corrección (c) para compensar el offset del operacional.

Los redondeos existentes enmascaran el valor del offset, y hace falta un razonamiento detallado para darle el mejor valor a la

corrección que introduzcamos.

Si no hubiera offset, la tensión a la salida del operacional sería proporcional a

$$\epsilon = \text{red}(m) - r$$

siendo $\text{red}(m)$ el valor de m con precisión de miligrados.

Con el offset, la tensión a la salida del operacional es proporcional a

$$\epsilon = \text{red}(m) - r + \epsilon_0$$

Supongamos que $\epsilon_0 = 1.0$ milésimas de grado. Vamos a ver a qué posición va la antena si $d = 10.0$; $c = 0$ (todos los valores expresados en miligrados).

$m = 10.0$	r_1	r	ϵ	tendencia
	10.0	10.	1.6	↑
	11.4	11.	.6	↑
	11.6	12.	-.4	↓

No hay posición intermedia entre 11.4 y 11.6 porque el mínimo salto es de .2 miligrados. Por lo tanto la posición estará oscilando entre 11.4 y 11.6.

Se puede fácilmente comprobar que la posición final es la misma para cualquier ϵ_0 tal que $1.1 < \epsilon_0 < 1.9$. En general, la posición final r_1 para un valor de ϵ_0 comprendido entre 1.1 y 1.9 viene dada por la fórmula

$$r_1 = \text{red}(m) + 1.5 \mp 0.1$$

Y si ϵ_0 estuviera comprendido entre 0.1 y 0.9, entonces:

$$r_1 = \text{red}(m) + 0.5 \pm 0.1$$

El valor de este error ha variado de un año a otro. Actualmente está entre 0.1 y 0.9, y por lo tanto la mejor corrección que podemos introducir es $c = 0.5$ miligrados.

4. Retraso de la antena en llegar a la posición comandada.

Hemos visto que, por la misma forma de funcionamiento del servo, tiende a haber un error en la posición constante para una determinada velocidad de la antena. Es decir, la antena llega con un cierto retraso a la posición comandada. La intención de este trabajo es medir este error y compensarlo.

El hablar de velocidad constante es una idealización consistente en suponer que en cada instante la antena tiene un comando nuevo, ligeramente diferente al del instante anterior. Se suele decir que se comanda mediante una señal en rampa. En la realidad los comandos son discretos y están separados entre sí un cierto tiempo. Es lo que se denomina señal escalonada. El comportamiento del servo varía lógicamente con el intervalo de tiempo entre comandos sucesivos, y este factor ha de ser tomado en cuenta. Por ello se ha tomado como variable el intervalo entre comandos.

2. Medición del error de puntería en función de la velocidad.

2.1. Programa VELO3.

El programa VELO3 está hecho para medir la diferencia media entre la posición en la que debería estar la antena y la posición real en ese mismo instante. Las mediciones se hacen independientemente en azimut y elevación. Cuando la antena se mueve en azimut está quieta en elevación y viceversa. El movimiento es a velocidad constante, que determinamos al comenzar la medición. La comparación entre la posición deseada y la real se hace cada centésimo de segundo. El tiempo que transcurre entre dos comandos sucesivos es ajustable en múltiplos de una centésima de segundo.

A continuación se da el listado del programa.

FTJ,L

```

PROGRAM VEL03
CALL LEANT (15B,A)
CALL LEANT (16B,E)
CALL CMVD (17B,A)
CALL CMVD (20B,E)
CALL RELOJ (13B,IH,IM,ICS)
CALL ISWR(0B,0B)
201 WRITE(2,3)
3 FORMAT (//,"MOVIMIENTO EN ACIMUT (0) O EN ELEVACION (1)? =-")
READ (1,*) IQJE
666 WRITE (2,4)
4 FORMAT (//,"COORDENADAS DE PARTIDA",/, "ELEVACION = -")
READ (1,*) ELP
IF (ELP-89.5) 667,666,666
667 IF (ELP-5.) 665,665,668
668 WRITE (2,5)
5 FORMAT (/, "ACIMUT = -")
READ (1,*) AZP
IF (AZP-354.) 669,666,666
669 IF (AZP-5.) 665,665,671
671 IADE=0
IADA=0
85 AZ=AZP
EL=ELP
CALL LEANT (15B,AZM)
CALL LEANT (16B,ELV)
CALL ACEL (IADA,AZM,AZ,AAA)
CALL ACEL (IADE,ELV,EL,AAE)
ARGU=AZ*4.468043+0.541052
AZ=AZ+2.6194E-3*SIN(ARGU)
ARGU=EL*4.468043-1.134464
EL=EL+2.8889E-3*SIN(ARGU)
IF(EL-5.)129,131,131
129 WRITE(2,200)
200 FORMAT ("ELEVACION DEMASIADO BAJA")
GO TO 201
131 IF(EL-89.5)132,132,133
133 WRITE(2,202)
202 FORMAT ("ELEVACION DEMASIADO ALTA")
GO TO 201
132 IF(ABS(AZM-AZ)-0.001)301,301,302
301 CALL ISWR (173777B,0B)
GO TO 315
302 CALL ISWR (177777B,4000B)
315 IF (ABS(ELV-EL)-0.001)303,303,304
303 CALL ISWR (137777B,0B)
GO TO 316
304 CALL ISWR (177777B,40000B)
316 AZIM1=AZ-1.6E-3
ELEV1=EL-1.6E-3
CALL CMVD (17B,AZIM1)
CALL CMVD (20B,ELEV1)
IF(ABS(AZP-AZM)-.01)84,85,85
84 IF(ABS(ELP-ELV)-.01)87,85,85
87 AZIPI=AZP-1.6E-3
ELIPI=ELP-1.6E-3
CALL CMVD (17B,AZIPI)
CALL CMVD (20B,ELIPI)
WRITE (2,25)

```

```

25 FORMAT (//, "INTERVALO ENTRE COMANDOS EN CENTESIMAS DE SEG = ")
   READ (1,*) INTE
   WRITE (2,26)
26 FORMAT(//, "INCREMENTO ENTRE COMANDOS EN GRADOS = ")
   READ (1,*) AIN
   AINTE=INTE
   VEL=100.*AIN/AINTE
   AINC=AIN/AINTE
   WRITE (2,27) VEL
27 FORMAT (//, "VELOCIDAD EN GRADOS/SEGUNDO = ", F8.5)
   C01=4.468043
   IF (IQUE) 10, 10, 20
10  ISC=17B
   ISJ=15B
   C02=0.541052
   C03=2.6194E-3
   COC=AZP+AIN/2.
   GO TO 139
20  ISC=20B
   ISJ=16B
   C02=-1.134464
   C03=2.8889E-3
   COC=ELP+AIN/2.
139 IR=INTE
   COC0=COC+C03*SIN(COC*C01+C02)
32 AN=0.
   SUME=0.
   SUM1=0.
30 AN=AN+1.
   IF (INTE-IR) 49, 62, 61
62 CALL CMJD (ISC, COC0)
   IR=0
61 CALL LEANT (ISJ, COLE)
   SUME=SUME+COC0-COLE
   SUM1=SUM1+((COC0-COLE)**2)
   SUM2=(SUME**2)/AN
   ERM=SUME/AN
   DTE=SQRT((SUM1-SUM2)/AN)
   ICSA=ICS
39 IF (ICSA-ICS) 41, 40, 41
40 GO TO 39
41 IR=IR+1
31 IF(ISSW(15))52, 33, 33
33 COC=COC+AINC
   COC0=COC+C03*SIN(COC*C01+C02)
   IF (IQUE) 400, 500, 430
400 IF(COC0-89.5)401, 401, 402
401 IF(COC0-5.)402, 402, 403
500 IF (COC0-354.)404, 402, 402
404 IF (COC0-5.)402, 402, 403
403 IF(ISSW(0))30, 32, 32
402 WRITE (2,502)
502 FORMAT ("LIMITES SOBREPASADOS")
52 WRITE (2,53) AN, ERM, DTE
53 FORMAT (///, "TAMANO DE LA MUESTRA = ", E10.3, //,
  *"ERROR MEDIO = ", F10.6, //, "DESVIACION TIPICA DEL ERROR = ",
  *F10.6)
   STOP
49 WRITE (2,100)
100 FORMAT (//, "ERROR EN EL CROMOMETRO")
   END
FVDS

```

El programa VELO3 utiliza las siguientes subrutinas:

- LEANT : lleva a la memoria del ordenador la lectura de la posición de la antena, pasando del formato BCD al formato del ordenador.
- CMED : lleva del ordenador a la antena el comando de posición, pasando del formato interno del ordenador al BCD.
- RELOJ : cada centésima de segundo interrumpe el programa principal para colocar en memoria las horas, los minutos y las centésimas de segundo que figuran en el reloj de tiempo universal.
- ISWR : enciende o apaga los bits del switch register del ordenador.
- ACEL : evita que la antena tenga movimientos bruscos. Es útil en los desplazamientos rápidos, pues regula el movimiento mediante una aceleración y deceleración suaves.

Todas estas subrutinas están escritas en ensamblador y forman parte del sistema operativo de control del radiotelescopio.

Significación de las variables utilizadas en el programa:

CO1, CO2, CO3 : correcciones angulares debidas al error periódico de los transductores.

IR : contador del intervalo entre comandos.

AN : contador del tamaño de la muestra.

CCCC : posición comandada a la antena.

SULE = \sum error

SUL1 = $\sum(\text{error})^2$

SUL2 = $\frac{(\sum \text{error})}{AN}$

$$\text{ERM} = \text{error medio} = \frac{\sum \text{error}}{AN}$$

$$\text{DTE} = \text{desviación típica del error} = \sqrt{\frac{\sum \text{error}^2 - \frac{(\sum \text{error})^2}{AN}}{AN}}$$

Funcionamiento del programa :

La antena es llevada al lugar de partida. Se indica si el movimiento va a ser en azimut o elevación y se dan los datos de :

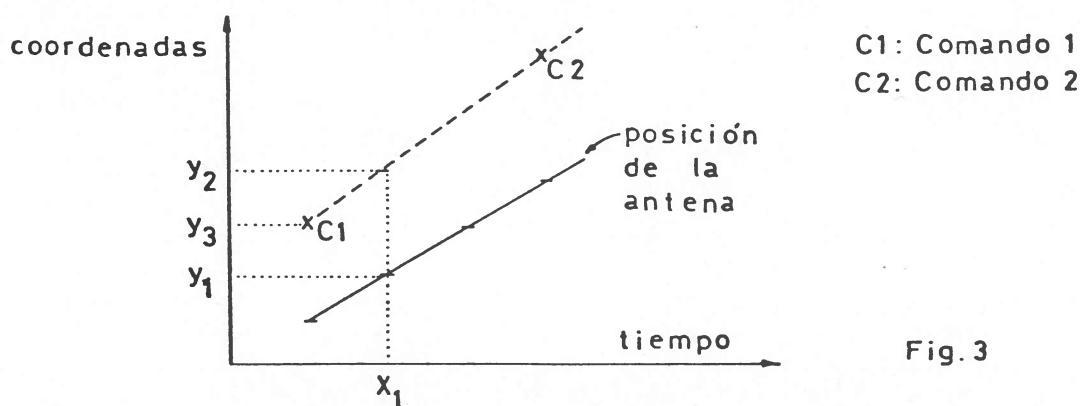
- intervalo entre comandos en centésimas de segundo (INTE)
- incremento de grados entre comandos sucesivos (INX)

Se empieza a mover la antena a la velocidad fijada, pero los contadores continúan a cero hasta que encendemos el bit "0" del SR del ordenador. El ciclo básico del programa está completado con un retardador, de manera que dure exactamente una centésima de segundo. En cada ciclo se toma una muestra del error de posición :

error = posición en la que debería estar la antena - posición leída

Cada INTE centésimas de segundo se envía un comando nuevo, de acuerdo con la velocidad que hayamos fijado.

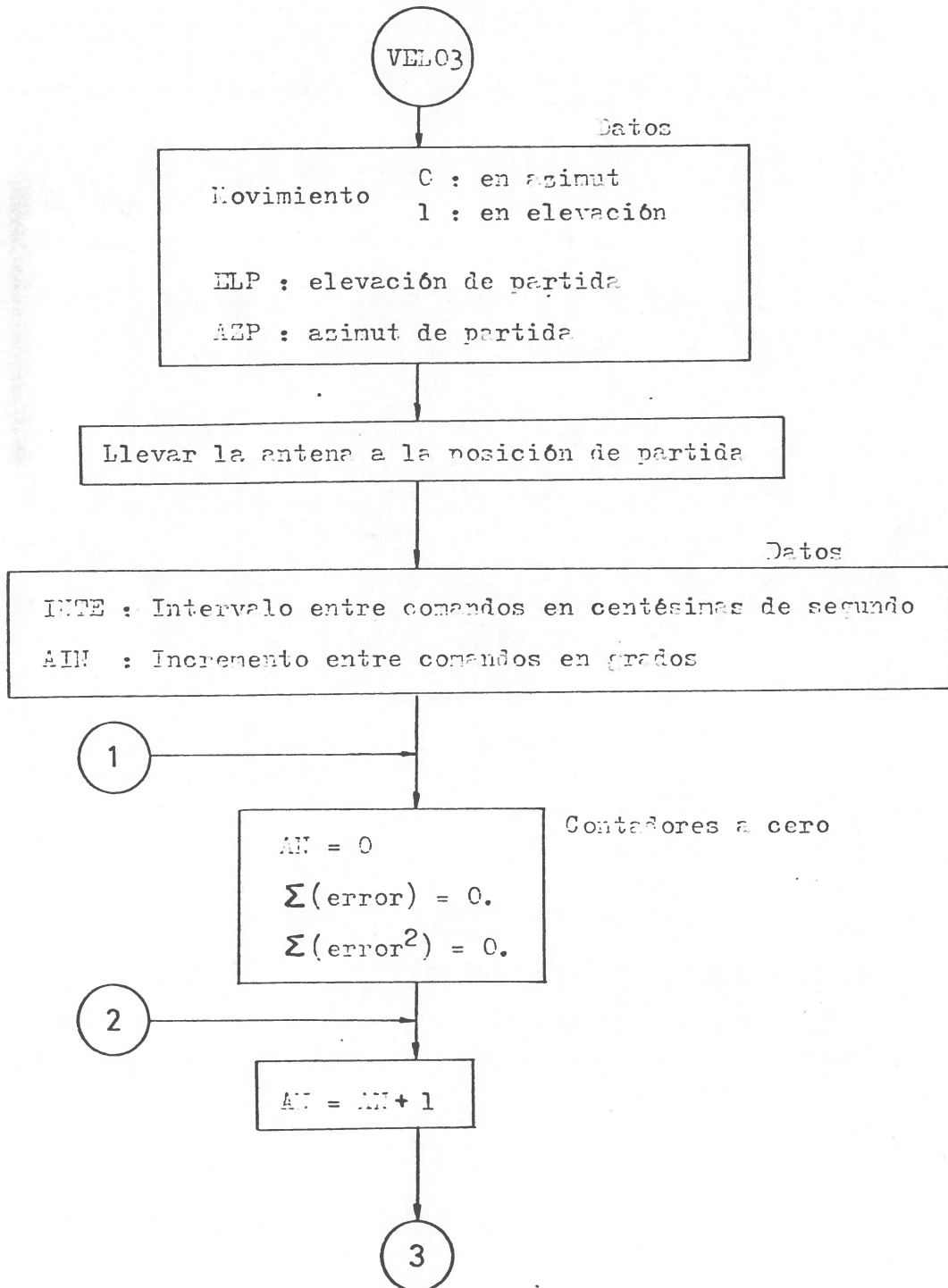
El error no se mide sobre la última posición comandada, sino sobre la posición que comandaríamos de haber comando en ese momento, como se explica en la figura 3

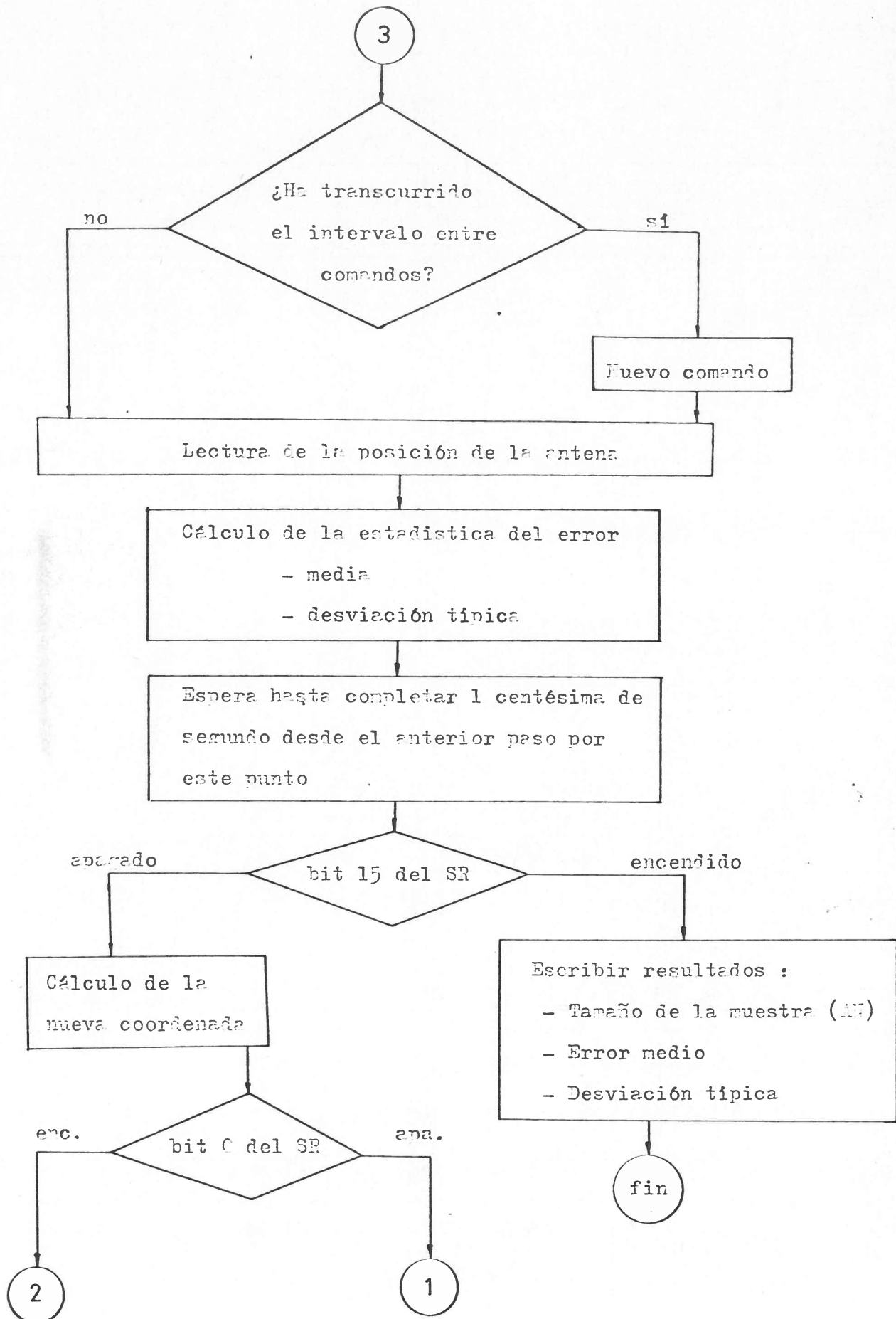


El error medido en el instante x_1 es $y_2 - y_1$ y no $y_3 - y_1$

El programa se para cuando encendemos el bit 15 del SR del ordenador. Como resultado obtenemos el error medio, su desviación típica y el tamaño de la muestra.

Diagrama de flujo





2.2. Medidas

Se tomaron medidas del error de velocidad con VELO3 para los siguientes valores :

Intervalo entre comandos : 1,3,5 10 centésimas de segundo.

Velocidades teóricas de la antena : 5,15,30,45 miligrados por ser.

Estas velocidades teóricas no coinciden con las reales debido al funcionamiento numérico del ordenador. Por ejemplo, si la antena está en un azimut de 200° , la velocidad teórica de 5 miligrados por segundo supone un incremento del azimut de 0.00005 grados al cabo de una centésima de segundo. El ordenador ha de realizar la suma

$$200 + 0.00005$$

Un número en coma flotante se representa en el ordenador con 23 bits para la mantisa. Los números 200, 0.00005, son representados así :

$$\begin{array}{ll} 200 & .11001000000000000000000 \times 2^8 \\ 0.00005 & .0000000000000000110100011 \times 2^0 \end{array}$$

Para sumarlos se ha de igualar el exponente, y el número 0.00005 pasa a ser representado así :

$$.000000000000000000000010 \times 2^8$$

siendo redondeada la última cifra. Este número escrito en decimal es el 0.00006104. Por lo tanto en el azimut de 200° la velocidad teórica de 5 miligrados por segundo corresponde a una velocidad real de 6.104 miligrados por segundo.

En las medidas realizadas se calcularon a posteriori las velocidades reales de la antena. Los resultados aparecen expresados en las tablas I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII ; y en los gráficos 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 .

TABLA I : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VET.03.

- movimiento en azimut.

- intervalo entre comandos : 1 centésimo de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
6.104	-0.940	0.259
12.207	-0.933	0.247
30.518	-0.838	0.233
45.777	-0.691	0.239
-6.104	-1.085	0.283
-12.207	-1.195	0.267
-30.518	-1.426	0.232
-45.777	-1.498	0.210

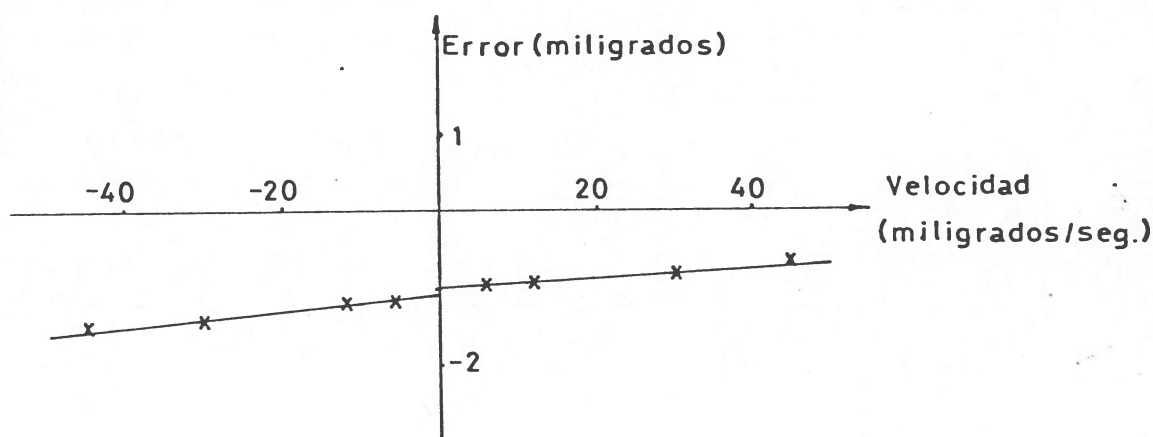


Fig. 4

Rectas del regresión del error medio :

$$E = 0.006 \times V - 1.00 \quad \text{para } V > 0$$

$$E = 0.010 \times V - 1.05 \quad \text{para } V < 0$$

siendo :

V : velocidad en miligrados/segundo

E : error en miligrados

TABLA II : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VELO3.

- movimiento en azimut.

- intervalo entre comandos : 3 centésimas de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
6.104	-0.676	0.177
12.207	-0.594	0.163
30.518	-0.222	0.206
45.777	-0.041	0.220
-6.104	-1.017	0.167
-12.207	-1.235	0.144
-30.518	-1.710	0.184
-45.777	-2.130	0.246

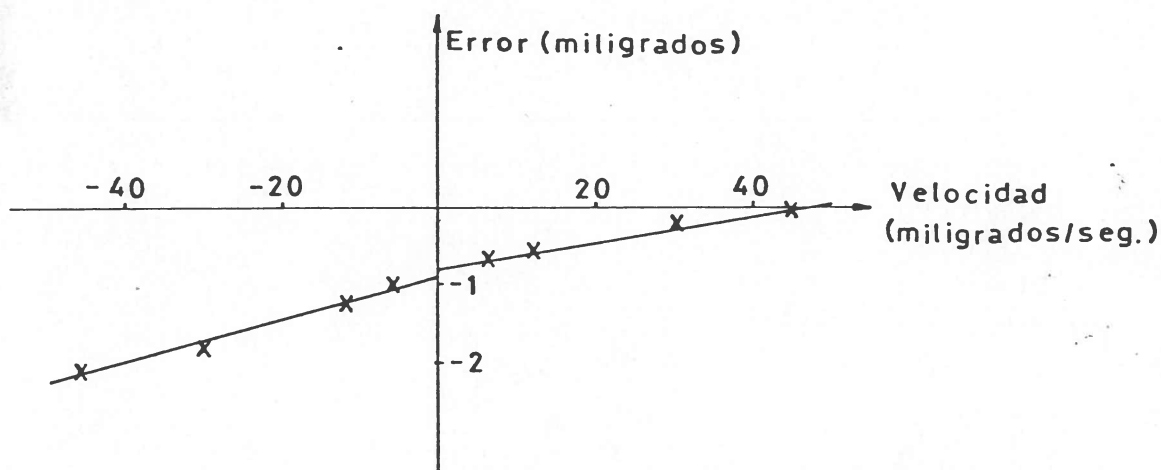


Fig. 5

Rectas de regresión del error medio :

$$E = 0.017 \times V - 0.78 \quad \text{para } V > 0 \quad (E-1)$$

$$E = 0.028 \times V - 0.87 \quad \text{para } V < 0 \quad (E-2)$$

Tabla III : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VELO3.

- movimiento en azimut.

- intervalo entre comandos : 5 centésimas de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
6.104	-0.631	0.177
12.207	-0.294	0.164
30.518	0.204	0.234
45.777	0.935	0.261
-6.104	-1.108	0.165
-12.207	-1.190	0.154
-30.518	-2.050	0.210
-45.777	-2.655	0.257

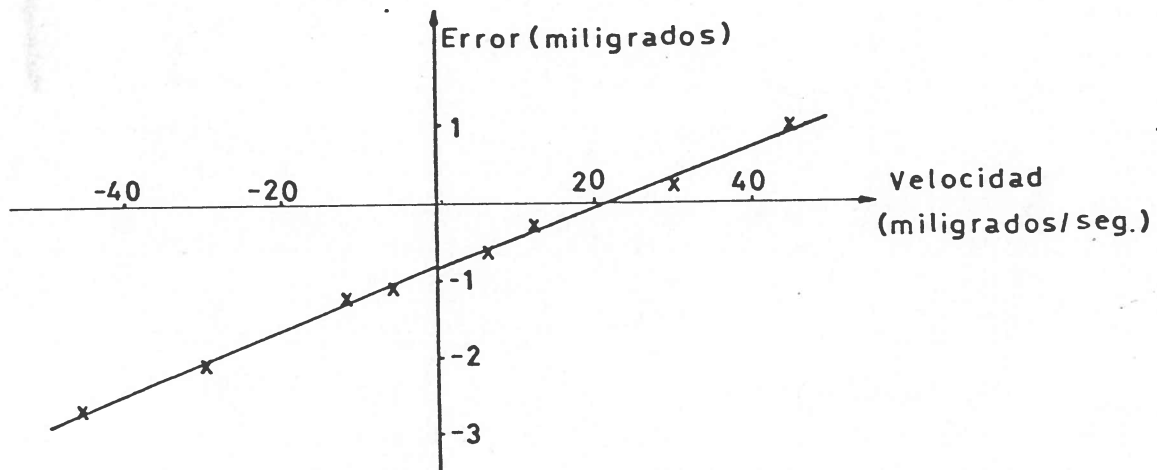


Fig. 6

Rectas de regresión del error medio :

$$E = 0.036 \times V - 0.85 \quad \text{para } V > 0$$

$$E = 0.041 \times V - 0.79 \quad \text{para } V < 0$$

TABLA IV : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VELO3.

- movimiento en azimut.

- intervalo entre comandos : 10 centésimas de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
6.104	-0.398	0.177
12.207	0.050	0.168
30.518	1.384	0.307
45.777	2.298	0.203
-6.104	-1.230	0.171
-12.207	-1.569	0.165
-30.518	-2.869	0.340
-45.777	-3.736	0.207

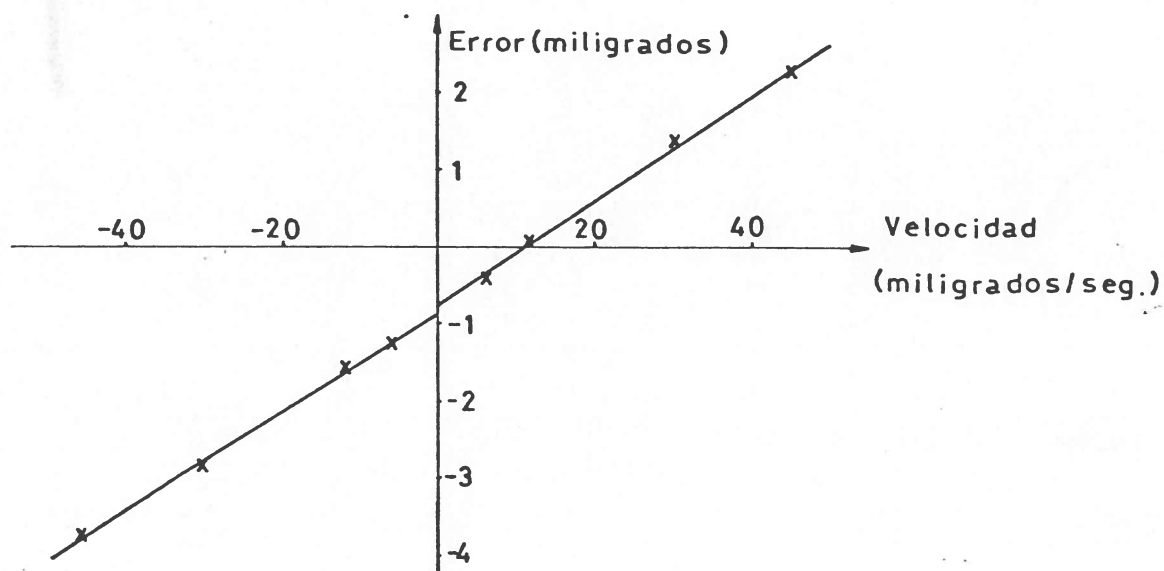


Fig. 7

Rectas de regresión del error medio :

$$E = 0.068 \times V - 0.78 \quad \text{para } V > 0$$

$$E = 0.064 \times V - 0.83 \quad \text{para } V < 0$$

TABLA V : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VELO3.

- movimiento en elevación.

- intervalo entre comandos : 1 centésima de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
14.877	-0.859	0.150
15.259	-0.841	0.162
30.136	-0.835	0.204
30.518	-0.852	0.165
44.250	-0.858	0.185
45.013	-0.799	0.254
-14.877	-1.074	0.176
-15.259	-1.091	0.183
-30.136	-1.269	0.164
-30.518	-1.286	0.141
-44.250	-1.446	0.167
-45.013	-1.446	0.174

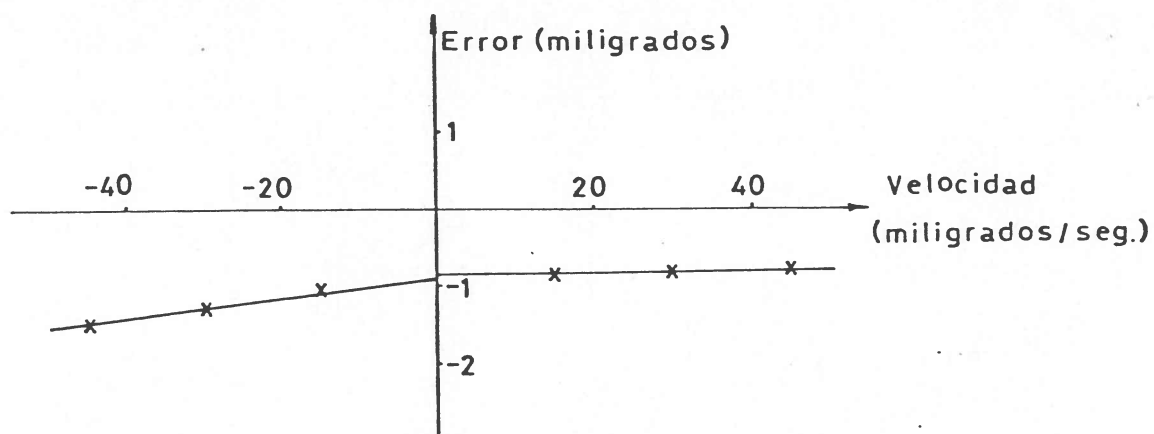


Fig. 8

Rectas de regresión del error medio :

$$E = 0.001 \times V - 0.86 \quad \text{para } V > 0$$

$$E = 0.012 \times V - 0.90 \quad \text{para } V < 0$$

TABLA VI : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VELO3.

- movimiento en elevación.

- intervalo entre comandos : 3 centésimas de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
14.877	-0.628	0.156
15.259	-0.599	0.147
30.136	-0.408	0.190
30.518	-0.468	0.156
44.250	-0.346	0.204
45.013	-0.220	0.254
-14.877	-1.274	0.163
-15.259	-1.279	0.165
-30.136	-1.713	0.163
-30.518	-1.725	0.166
-44.250	-2.170	0.206
-45.013	-2.113	0.218

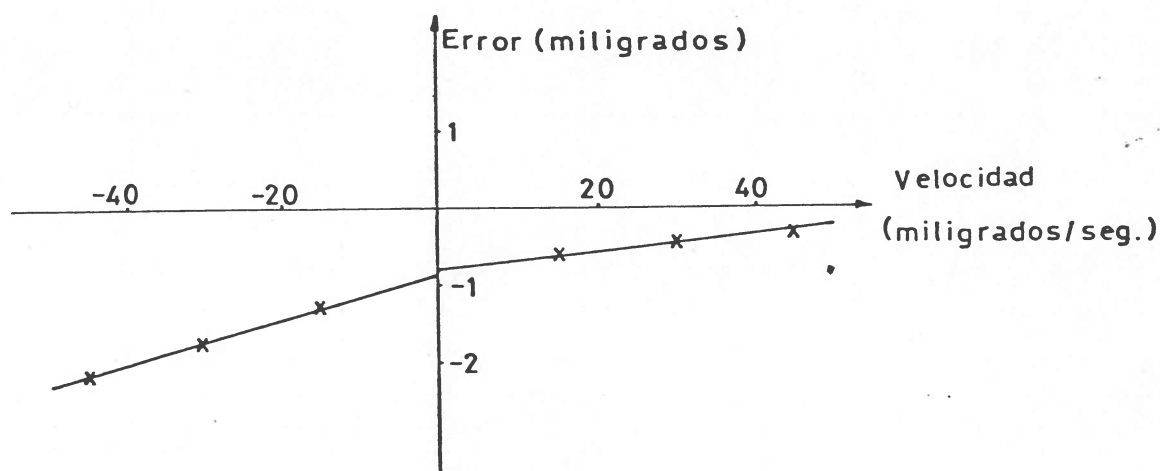


Fig. 9

Rectas de regresión del error medio :

$$E = 0.011 \times V - 0.78 \quad \text{para } V > 0 \quad (E-3)$$

$$E = 0.029 \times V - 0.84 \quad \text{para } V < 0 \quad (E-4)$$

TABLA VII : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VELO3.

- movimiento en elevación.

- intervalo entre comandos : 5 centésimas de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
14.877	-0.449	0.171
15.259	-0.446	0.163
30.136	-0.059	0.243
30.518	-0.150	0.200
44.250	0.139	0.230
45.013	0.358	0.254
-14.877	-1.454	0.175
-15.259	-1.473	0.177
-30.136	-2.065	0.236
-30.518	-2.134	0.205
-44.250	-2.767	0.257
-45.013	-2.704	0.238

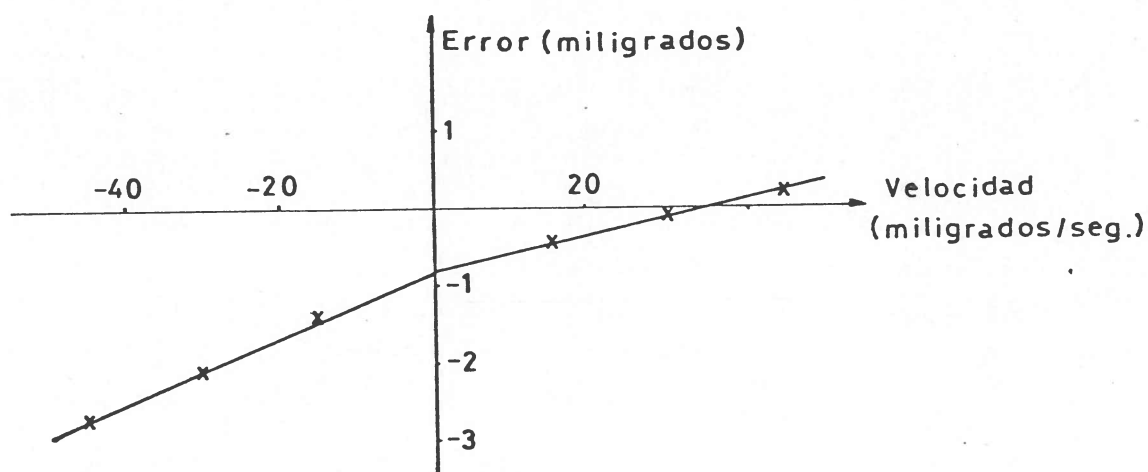


Fig. 10

Rectas de regresión del error medio :

$$E = 0.024 \times V - 0.81 \quad \text{para } V > 0$$

$$E = 0.043 \times V - 0.81 \quad \text{para } V < 0$$

TABLA VIII : Error medio y desviación típica del error medidos por el programa VELO3.

- movimiento en elevación.

- intervalo entre comandos: 10 centésimas de segundo.

Velocidad (miligrados/seg.)	Error medio (miligrados)	Desviación típica (miligrados)
14.877	-0.047	0.237
15.259	-0.024	0.214
30.136	1.032	0.341
30.518	1.153	0.352
44.250	1.968	0.205
45.013	1.926	0.251
-14.877	-1.868	0.240
-15.259	-1.879	0.234
-30.136	-2.828	0.374
-30.518	-2.920	0.379
-44.250	-3.810	0.289
-45.013	-3.729	0.274

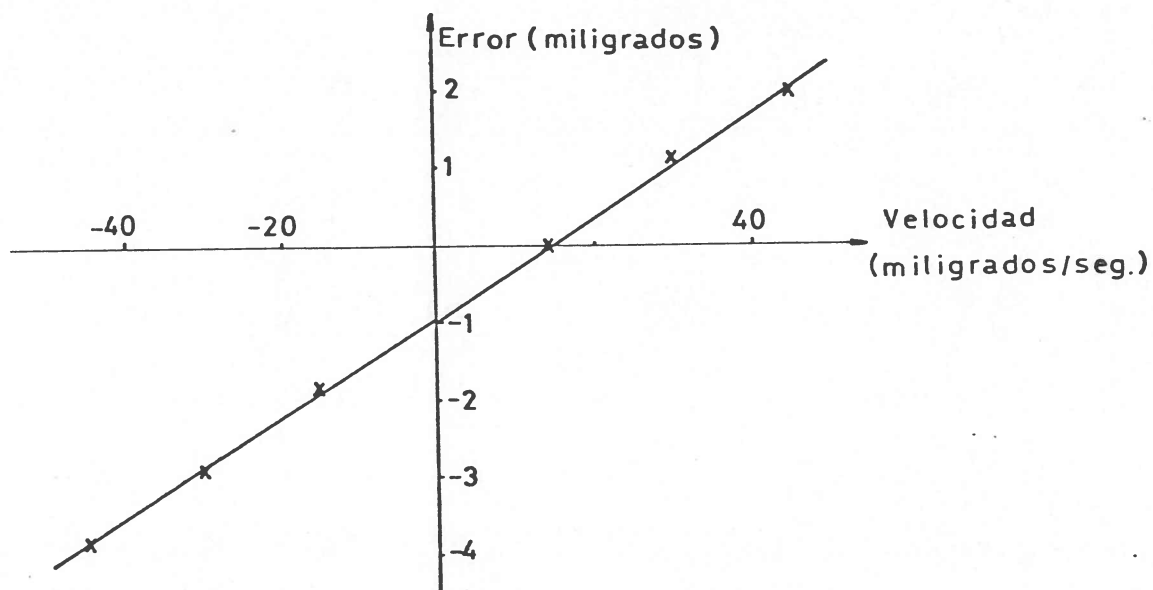


Fig. 11

Rectas de regresión del error medio :

$$E = 0.067 \times V - 1.01 \quad \text{para } V > 0$$

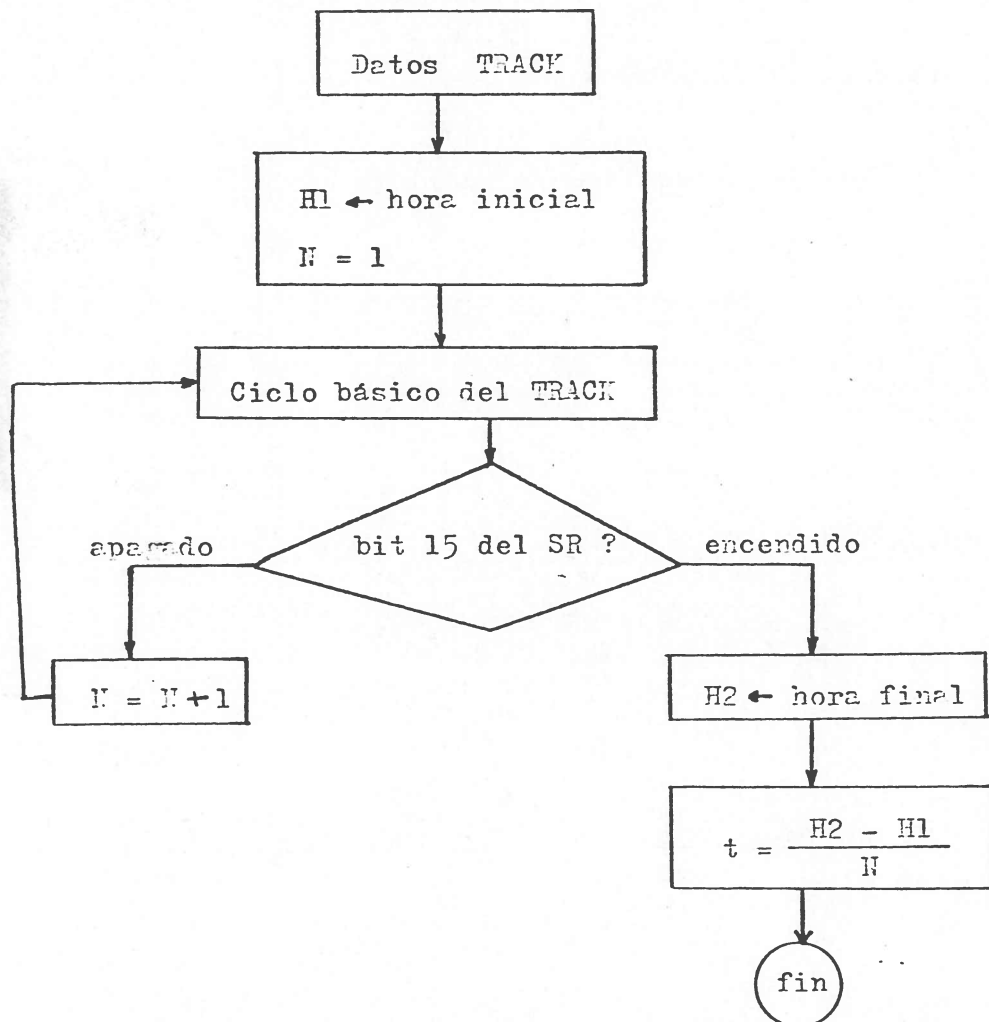
$$E = 0.064 \times V - 0.92 \quad \text{para } V < 0$$

En el programa VELO3 no figura la corrección al error debido al offset en el amplificador de la señal de error. Este error forma parte por consiguiente del error que mide el programa y a él atribuimos el factor constante que aparece en las rectas de regresión, y que es prácticamente igual en todos los casos. Por lo tanto cuando corriamos el error en velocidad por medio de estas rectas ya estará incluida la corrección al error debido al offset y no hará falta corregirlo independientemente.

Se midió el error en diferentes elevaciones por si ello influía. Resultó no ser así y por ello en la exposición de los resultados no se ha hecho distinción en las medidas tomadas a altas o bajas elevaciones.

Intervalo entre comandos

Las correcciones que debemos introducir dependen del intervalo de tiempo que transcurra entre dos comandos sucesivos. Se ha medido en el programa general de observación (TRACK) la duración del ciclo básico de cálculo, es decir, el tiempo entre dos comandos consecutivos. Para ello se hizo el programa CRONO, cuyo esquema de bloques es



El resultado fue que transcurren aproximadamente 31 milisegundos entre dos comandos consecutivos. Por lo tanto se han de tomar las correcciones correspondientes a 3 centésimas de segundo. De todas formas es útil saber las correcciones para otros intervalos pues el programa TRACK está abierto a modificaciones que hacen variar el intervalo.

3. Cálculo de la velocidad de la antena en observación.

Para poder introducir la corrección de velocidad en un programa de observación hemos de calcular en cada momento la velocidad a la que se mueve la antena.

Las relaciones entre coordenadas locales y ecuatoriales son :

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H \quad (1)$$

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} h + \cos \varphi \cos h \cos A \quad (2)$$

siendo :

- A : azimut
- h : elevación
- α : ascensión recta
- δ : declinación
- φ : latitud
- λ : longitudud
- $H = TS_0 + c \cdot TU - \lambda - \alpha$

$$c = 1.00273791$$

TS_0 : ángulo horario del punto Aries a las
cero horas de tiempo universal.

TU : tiempo universal

H : ángulo horario de la fuente

Lógicamente

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

$$\frac{dTS_0}{dt} = 0$$

Además, podemos considerar

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 0$$

$$\frac{dTU}{dt} = 1$$

ya que, aunque en los planetas y el Sol la ascensión recta y declina-

ción varían de un día a otro, lo hacen de una forma tan lenta que resulta absolutamente despreciable su contribución a la velocidad de la antena.

Para hallar la velocidad de seguimiento en elevación derivamos (1) y despejamos :

$$\frac{d \operatorname{sen} h}{dt} = \cos h \frac{dh}{dt} = -c \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} H$$

$$\frac{dh}{dt} = -c \cdot \frac{\cos \delta \cos \varphi \operatorname{sen} H}{\cos h} \quad (3)$$

Para hallar la velocidad de seguimiento en azimut derivamos (2) y despejamos :

$$\frac{d \operatorname{sen} \delta}{dt} = 0 = \operatorname{sen} \varphi \cos h \frac{dh}{dt} + \cos \varphi \left(-\operatorname{sen} h \cos A \frac{dh}{dt} - \operatorname{sen} A \cos h \frac{dA}{dt} \right)$$

$$\cos \varphi \operatorname{sen} A \cos h \frac{dA}{dt} = (\operatorname{sen} \varphi \cos h - \operatorname{sen} h \cos A \cos \varphi) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = -(\operatorname{sen} \varphi \cos h - \operatorname{sen} h \cos A \cos \varphi) \frac{c \cdot \cos \delta \cos \varphi \operatorname{sen} H}{\cos \varphi \operatorname{sen} A \cos^2 h}$$

$$\frac{dA}{dt} = (\operatorname{sen} h \cos A \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos h) \frac{c \cdot \cos \delta \operatorname{sen} H}{\operatorname{sen} A \cos^2 h} \quad (4)$$

Es interesante conocer entre qué límites van a variar las velocidades de la antena en azimut y elevación. Para ello vamos a estudiar tres apartados :

- a) Velocidad en elevación al culminar la fuente.
- b) Valores de la declinación para los cuales las velocidades en elevación son máximas.
- c) Máxima velocidad en azimut.

a) Velocidad en elevación al culminar la fuente.

En (3) podemos poner $\cos h$ en función del ángulo horario, despejando su valor de la fórmula (1)

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{c \cdot \cos \delta \cos \varphi \operatorname{sen} H}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H)^2}}$$

si $H=0$, resulta $\frac{dh}{dt} = 0$

Es decir, la velocidad en elevación al culminar es cero. Salvo el caso

$$1 - (\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi + \cos \delta \cos \varphi)^2 = 0$$

$$1 = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi + \cos \delta \cos \varphi = \cos(\delta - \varphi)$$

$$\delta - \varphi = n \cdot \pi \quad \text{siendo } n \text{ entero}$$

Esto es, $\delta = \varphi$, que es el caso en que la fuente culmina en el cenit. Este caso en la práctica no se da, pues se limita la elevación de la antena a 89.5° .

- b) Valores de la declinación para los cuales las velocidades en elevación son máximas.

Hemos de hallar el máximo de la función

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{\cos \delta \cos \varphi \operatorname{sen} H}{\cos h}$$

Lo que vamos a hacer es hallar para una fuente determinada, de coordenadas δ , α , la velocidad máxima en elevación. Es decir, calculamos el máximo de la función $\frac{dh}{dt}$, con δ , α constantes. Por supuesto φ , λ también son constantes, pues están determinadas para el observatorio. Por eso nos basta con hallar el máximo de la función $\frac{\operatorname{sen} H}{\cos h}$

Despejando $\operatorname{sen} H$ en (1)

$$\operatorname{sen} H = \sqrt{1 - \frac{(\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi)^2}{\cos^2 \delta \cos^2 \varphi}} \quad (5)$$

Para abreviar llamamos

$$\begin{aligned} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi &= c_1^2 \\ \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi &= c_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Entonces nos queda

$$\operatorname{sen} H = \frac{1}{c_1} \sqrt{c_1^2 - (\operatorname{sen} h - c_2)^2}$$

En definitiva

$$\frac{d}{dh} \frac{\operatorname{sen} H}{\cos h_m} = \frac{d}{dh} \frac{\sqrt{c_1^2 - (\operatorname{sen} h_m - c_2)^2}}{\cos h} = 0$$

siendo h_m la elevación para la cual la velocidad en elevación es máxima.

Resolviendo la derivada

$$\frac{1}{2\sqrt{\quad}} (-2) (\text{sen } h_m - c_2) \cos^2 h_m + \text{sen } h_m \sqrt{\quad} = 0$$

Se llega a

$$\text{sen}^2 h_m + \frac{c_1^2 - c_2^2 - 1}{c_2} \text{sen } h_m + 1 = 0$$

Y sustituyendo c_1, c_2 por su valor dado en (6)

$$\text{sen}^2 h_m - \left(\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \delta} + \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varphi} \right) \text{sen } h_m + 1 = 0 \quad (7)$$

Si llamamos

$$\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \delta} + \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varphi} = B$$

La solución de la ecuación (7) es

$$\text{sen } h_m = \frac{B}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - 1} \quad (8)$$

Donde el signo es + para $\delta < 0$

- para $\delta > 0$

Vamos a justificar estos signos. Es fácil demostrar que B tiene un valor mínimo de 2. Por otra parte,

$$\text{si } \delta > 0 \rightarrow B > 0$$

$$\text{y si } \delta < 0 \rightarrow B < 0$$

Sea $\delta > 0$:

$$\text{sen } h_m = (1 + \xi) \mp \sqrt{(1 + \xi)^2 - 1} \quad 0 < \xi < 1$$

y vemos que el signo ha de ser - para que el seno no supere el

valor de 1. De la misma forma se demuestra que si $\delta > 0$ se ha de tomar el signo +.

Para resolver (8) hacemos

$$B = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \delta} + \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \varphi} = x + \frac{1}{x}$$

Y resulta

$$\delta > 0 \rightarrow \operatorname{sen} h_m = \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (9)$$

$$\delta < 0 \rightarrow \operatorname{sen} h_m = x = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \delta} \quad (10)$$

Las fórmulas (9), (10) nos dan los valores de elevación para los cuales son máximas las velocidades en elevación.

Vamos a demostrar ahora que para $\delta > 0$ la velocidad máxima en elevación es únicamente función de latitud del observatorio, y vale

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{\max} = -c \cdot \cos \varphi \quad (11)$$

Sustituyendo (5) en (3) tenemos la velocidad en elevación de la siguiente forma :

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{\cos \delta \cos \varphi}{\operatorname{cosh}} \sqrt{1 - \frac{(\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi)^2}{\cos^2 \delta \cos^2 \varphi}}$$

Para demostrar (11) basta con comprobar la igualdad :

$$-c \cdot \cos \varphi \stackrel{?}{=} -c \frac{\cos \delta \cos \varphi}{\operatorname{cosh}} \sqrt{1 - \frac{(\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi)^2}{\cos^2 \delta \cos^2 \varphi}}$$

para el caso en que

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} h_m = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \varphi}$$

Esta comprobación es inmediata. Como

$$c = 1.00273791$$

$$\varphi = 40.523417^\circ \text{ en Yebes}$$

resulta

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{\text{máx}} = 3.176 \text{ milirradios / segundo}$$

Es decir, la velocidad máxima de la antena en elevación cuando funciona en seguimiento es de 3.176 milésimas de grado por segundo. A esta velocidad la corrección es despreciable, como podemos ver en la figura

Para $\delta < 0$ las velocidades son aún menores, porque la máxima de 3.176 milirradios/seg. se alcanzaría por debajo del horizonte.

c) Máxima velocidad en azimut.

La velocidad en azimut en seguimiento viene dada por la fórmula (4). Para cada declinación de la fuente los máximos de velocidad en azimut se dan cuando $H = 0$. Por consideraciones geométricas se puede demostrar que esa velocidad máxima es

$$v_{A \text{ máx}} = \frac{c \cdot \cos \delta}{\cos h}$$

Vamos a comprobar que con la fórmula (4) se llega al mismo resultado. No es inmediato porque si $H = 0$ se anulan $\sin H$ y $\sin A$ y se tiene una indeterminación. Queremos comprobar que

$$\left(\sin h \cos A \cos \varphi - \sin \varphi \cos h \right) \cdot \left. \frac{\cos \delta \sin H}{\sin A \cos^2 h} \right|_{\substack{A=0 \\ H=0}} \stackrel{?}{=} \frac{\cos \delta}{\cos h} \quad (12)$$

Si en (2) hacemos $A = 0$

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} h + \cos \varphi \cos h$$

es decir

$$\begin{aligned} A=0 &\rightarrow \cos \delta = \operatorname{sen}(h-\varphi) && \text{si } h > \varphi \\ &\cos \delta = -\operatorname{sen}(h-\varphi) && \text{si } h < \varphi \end{aligned}$$

Como $A = 0$, en lugar de la (12) podemos escribir

$$\operatorname{sen}(h-\varphi) \frac{\cos \delta \operatorname{sen} H}{\cos^2 h \operatorname{sen} A} \stackrel{?}{=} \frac{\cos \delta}{\cos h}$$

Si aquí sustituimos $\operatorname{sen}(h-\varphi)$ por \cos no perdemos generalidad, únicamente tomamos el valor absoluto de la velocidad sin tener en cuenta el signo. Basta pues comprobar que

$$\frac{\cos^2 \delta \cdot \operatorname{sen} H}{\cos^2 h \operatorname{sen} A} \stackrel{?}{=} \frac{\cos \delta}{\cos h}$$

es decir

$$\frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{sen} A} \stackrel{?}{=} \frac{\cos h}{\cos \delta}$$

Sustituyendo $\operatorname{sen} H$, $\operatorname{sen} A$, por valor dado por las ecuaciones (1), (2), queda

$$\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi}{\cos \delta \cos \varphi} \right)^2}{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} h}{\cos \varphi \cos h} \right)^2}} \stackrel{?}{=} \frac{\cos h}{\cos \delta}$$

cuya comprobación es inmediata.

En definitiva, al pasar por el meridiano

$$v_A \Big|_{H=0} = v_A \Big|_{\max} = c \cdot \frac{\cos \delta}{\cos h}$$

Como

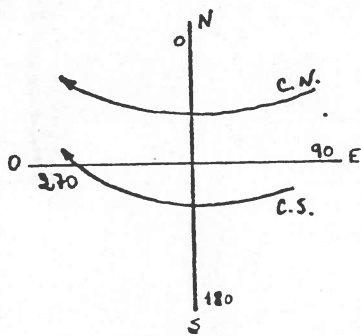
$$\cos h \Big|_{H=0} = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi = \cos(\delta - \varphi) = \cos(\varphi - \delta)$$

resulta que

$$\text{si } \delta > \varphi \rightarrow \cos h = \sin(\delta - \varphi)$$

$$\text{si } \delta < \varphi \rightarrow \cos h = \sin(\varphi - \delta)$$

Vamos a escoger el signo



- culminación norte : $\delta > \varphi$: velocidades en azimut negativas.

- culminación sur : $\delta < \varphi$: velocidades en azimut positivas.

La siguiente fórmula es válida para ambos casos

$$v_A \Big|_{\max} = v_A \Big|_{H=0} = c \cdot \frac{\cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)}$$

Cálculo de la velocidad en azimut y elevación para cualquier combinación de barridos.

Cinco movimientos contribuyen a la velocidad de la antena en azimut y elevación :

- movimiento propio de la fuente, causa de lo que llamamos movimiento de seguimiento.
- barrido en azimut.
- barrido en elevación.
- barrido en ascensión recta.
- barrido en declinación.

La velocidad en elevación la obtendremos a partir de (1), teniendo en cuenta que

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \frac{dTS_0}{dt} = 0, \quad \frac{dTU}{dt} = 1$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = V_{AR} \quad \frac{d\delta}{dt} = V_{DE} \quad \frac{dH}{dt} = c - V_{AR}$$

siendo :

V_{AR} : velocidad del barrido en ascensión recta

V_{DE} : velocidad del barrido en declinación

Derivando (1) con respecto al tiempo :

$$\frac{d \operatorname{sen} h}{dt} = \operatorname{cos} h \frac{dh}{dt} =$$

$$= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \delta V_{DE} - \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} H \operatorname{sen} \delta V_{DE} - \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen} H (c - V_{AR})$$

despejando

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \delta - \cos \varphi \cos H \operatorname{sen} \delta}{\cos h} v_{DE} + \frac{\cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen} H}{\cos h} v_{AR} - c \frac{\cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen} H}{\cos h} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta el posible barrido en elevación con velocidad v_{BEL} , la velocidad total en elevación v_{EL} es:

$$v_{EL} = \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \delta - \cos \varphi \cos H \operatorname{sen} \delta}{\cos h} v_{DE} + \frac{\cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen} H}{\cos h} v_{AR} - c \frac{\cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen} H}{\cos h} + v_{BEL} \quad (14)$$

Para hallar la velocidad de la antena en azimut derivamos

(2) con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sen} \delta}{dt} &= \cos \delta v_{DE} = \\ &= \operatorname{sen} \varphi \cos h \cdot \frac{dh}{dt} - \cos \varphi \operatorname{sen} h \frac{dh}{dt} \cos A - \cos \varphi \cos h \operatorname{sen} A \frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

despejando:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\cos \varphi \cos h \operatorname{sen} A} \left((\operatorname{sen} \varphi \cos h - \cos \varphi \operatorname{sen} h \cos A) \frac{dh}{dt} - \cos \delta v_{DE} \right)$$

siendo el valor dado por (13)

Teniendo en cuenta el posible barrido en azimut con velocidad v_{BAZ} , la velocidad total en azimut v_{AZ} es:

$$v_{AZ} = \frac{1}{\cos \varphi \cos h \operatorname{sen} A} \left((\operatorname{sen} \varphi \cos h - \cos \varphi \operatorname{sen} h \cos A) \frac{dh}{dt} - \cos \delta v_{DE} \right) + v_{BAZ}$$

4. Resumen final.

Se ha medido el error de puntería introducido por los servomecanismos de control para diferentes intervalos entre comandos. De esta forma sabemos los errores de velocidad para el actual intervalo entre comandos del programa de observación, que es de 31 milisegundos.

Para introducir las correcciones a este error en el programa de observación se han de hacer los siguientes pasos :

- Calcular las velocidades de la antena en azimut y elevación por medio de las fórmulas (14) , (15) .
- Calcular los errores que se producen mediante las ecuaciones (E-1) , (E-2) , (E-3) , (E-4).
- Corregir los comandos a enviar a la antena de acuerdo con ello.

De esta forma quedan compensados los errores electrónicos de los servomecanismos.