DESARROLLO MATEMÁTICO PARA LA REALIZACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN HELMERT 3D

Beatriz Córdoba Hita, Javier López Ramasco

INFORME TÉCNICO IT - CDT 2017 - 5

Los desarrollos descritos en este informe técnico han sido cofinanciados por el Proyecto de investigación del Plan Nacional de investigación fundamental no orientada, FIS2012-38160 "ESTUDIOS Y DESARROLLOS INSTRUMENTALES DE GEODESIA ESPACIAL Y PRIMERAS MEDIDAS DE LINEAS DE BASE INTERCONTINENTALES CON PRECISIONES MILIMÉTRICAS"

Contenidos

1 Introducción

Para transformar unas coordenadas dadas en un sistema de referencia a otro sistema es necesario realizar diversas operaciones matemáticas consistentes en aplicar giros, traslaciones y factores de escala sobre las coordenadas del sistema origen. La transformación Helmert es una metodología que lleva a cabo dichas transformaciones entre sistemas de referencia.

En el caso de trabajar en el espacio tridimensional, la transformación consta de 7 parámetros, ya que está compuesta de tres rotaciones, tres traslaciones y un factor de escala.

Existen dos variantes de la transformación Helmert, el método de Bursa- Wolf y el de Molodensky-Badekas. Ambos métodos usan mínimos cuadrados para deducir los parámetros de la transformación, pero en el segundo los datos son trasladados al origen como baricentro de cada sistema de coordenadas. Así el método de Molodensky-Badekas se usa en el caso en el que la diferencia entre los sistemas de referencia es muy grande ya que se puede producir un mal condicionamiento de la matriz del sistema de las ecuaciones normales. Por ejemplo, en el caso en el que los puntos están distribuidos en una zona muy pequeña de la Tierra y se dispone de un sistema local en el que se miden dichos puntos y un sistema global, como pueda ser el IGb08, al que se quieren referir. Es este el caso que nos concierne y que describiremos en el siguiente epígrafe.

Cuando se habla de la transformación Helmert, en realidad estamos hablando de dos tipos de problemas que vamos a tratar por separado en el presente informe. El primer problema consiste en, dados varios puntos (al menos 2 y una coordenada de un tercero) en dos sistemas de referencia distintos, determinar los parámetros de la transformación, es decir las rotaciones, las traslaciones y el factor de escala. El segundo problema, por otro lado, consiste en, conocidos los 7 parámetros de la transformación transformar las coordenadas de un sistema en otro.

En general, si no se conocen los parámetros de la transformación, en primer lugar será necesario calcular dichos parámetros a partir de varios puntos en ambos sistemas, y en segundo lugar, aplicar los parámetros calculados al resto de los puntos.

2 Deducción de los 7 parámetros de la transformación Helmert 3D entre dos sistemas de referencia a través del método Molodensky-Badekas.

Vamos a tratar el primero de los problemas en relación con la transformación Helmert de 7 parámetros, esto es dados n puntos, siendo $n \geq 3$, en dos sistemas de referencia distintos calcular los parámetros de la transformación entre los dos sistemas con su matriz de varianza covarianza asociada.

Generalizando vamos a considerar las n coordenadas en los dos sistemas de referencia como observaciones, de manera que cada coordenada tendrá su propia precisión. Vamos a establecer dos sistemas de referencia que vamos a llamar sistema origen o local, en el que las coordenadas de los puntos las denotaremos (x, y, z) y el sistema final o global, en el que las coordenadas de los puntos serán denotadas como (X, Y, Z).

La relación entre ambos sistemas escrita en forma matricial viene dada por:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

donde:

S es el factor de escala.

θ_3 es el ángulo de rotación alrededor del eje z.

θ_2 es el ángulo de rotación alrededor del eje y.

θ_1 es el ángulo de rotación alrededor del eje x.

T_x, T_y, T_z son las traslaciones a lo largo de los ejes *x, y* y *z* respectivamente.

Al producto de las tres rotaciones lo vamos a denotar como:

$$r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

donde:

$r_{11} = \cos\theta_2 \cos\theta_3$

$r_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_3$

$r_{13} = -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \sin\theta_3$

$r_{21} = -\cos\theta_2 \sin\theta_3$

$r_{22} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_3$

$r_{23} = \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_3$

$r_{31} = \sin\theta_2$

$r_{32} = -\sin\theta_2 \cos\theta_2$

$r_{33} = \cos\theta_1 \cos\theta_2$

Podemos escribir así, las relaciones entre los dos sistemas como:

$$\begin{cases} X = S(r_{11}x + r_{21}y + r_{31}z) + T_x \\ Y = S(r_{12}x + r_{22}y + r_{32}z) + T_y \\ Z = S(r_{13}x + r_{23}y + r_{33}z) + T_z \end{cases}$$

Para resolver este sistema y deducir los parámetros se necesitan conocer al menos dos puntos y una coordenada de un tercero, para tener un sistema con siete ecuaciones y siete incógnitas. En el caso general se tienen más ecuaciones que incógnitas, por lo que para deducir los parámetros es necesario recurrir a una estimación a través de un ajuste mínimos cuadrados. El primer paso para llevar a cabo dicho ajuste consiste en linealizar las ecuaciones.

Como ya hemos dicho con anterioridad, vamos a considerar tanto las coordenadas (X, Y, Z) como las (x, y, z) como observaciones, de manera que en realidad realizaremos un Ajuste Mínimos Cuadrados Mixto.

Empezamos linealizando el modelo $F(X, L) = 0$:

$$F(X_0, L_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X_0, L_0} (X - X_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial L}\right|_{X_0, L_0} (L - L_0) = 0$$

donde:

X son los parámetros.

L son las observaciones.

X_0 son los valores aproximados de los parámetros.

L_0 son los valores aproximados de las observaciones.

De manera que se llega a un ajuste Mixto de la forma:

$$Ax + Bv = t$$

donde $A = \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X_0,L_0}$, $B = \left.\frac{\partial F}{\partial L}\right|_{X_0,L_0}$ y $t = -F(X_0, L_0)$.

En este caso las ecuaciones que tenemos que linealizar son las siguientes:

$$\begin{cases} F = X = S(r_{11}x + r_{21}y + r_{31}z) + T_x \\ G = Y = S(r_{12}x + r_{22}y + r_{32}z) + T_y \\ H = Z = S(r_{13}x + r_{23}y + r_{33}z) + T_z \end{cases}$$

Linealizaremos como ejemplo la primera de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F \cong F(X_0, L_0) &+ \left.\frac{\partial F}{\partial S}\right|_{X_0,L_0}(S - S_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial \theta_1}\right|_{X_0,L_0}(\theta_1 - \theta_{1_0}) + \left.\frac{\partial F}{\partial \theta_2}\right|_{X_0,L_0}(\theta_2 - \theta_{2_0}) + \left.\frac{\partial F}{\partial \theta_3}\right|_{X_0,L_0}(\theta_3 - \theta_{3_0}) + \left.\frac{\partial F}{\partial T_x}\right|_{X_0,L_0}(T_x - T_{x_0}) \\ &+ \left.\frac{\partial F}{\partial T_y}\right|_{X_0,L_0}\left(T_y - T_{y_0}\right) + + \left.\frac{\partial F}{\partial T_z}\right|_{X_0,L_0}(T_z - T_{z_0}) + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X_0,L_0}(X - X_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_{X_0,L_0}(Y - Y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial Z}\right|_{X_0,L_0}(Z - Z_0) \\ &+ \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{X_0,L_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{X_0,L_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{X_0,L_0}(z - z_0) \end{aligned}$$

con

$$F_0 = F(X_0, L_0) = [S(r_{11}x + r_{21}y + r_{31}z)]_0$$

Tomaremos la siguiente notación:

$dS = S - S_0$

$d\theta_1 = \theta_1 - \theta_{1_0}$ $\quad d\theta_2 = \theta_2 - \theta_{2_0}$ $\quad d\theta_3 = \theta_3 - \theta_{3_0}$

$dT_x = T_x - T_{x_0}$ $\quad dT_y = T_y - T_{y_0}$ $\quad dT_y = T_y - T_{y_0}$

$v_X = X - X_0$ $\quad v_Y = Y - Y_0$ $\quad v_Z = Z - Z_0$

$v_x = x - x_0$ $\quad v_y = y - y_0$ $\quad v_z = z - z_0$

De la misma manera procederíamos para linealizar G y H, llegando finalmente a un sistema de la forma

$$Ax + Bv = t$$

donde:

$$x = \left(dS, d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3, dT_x, dT_y, dT_z\right)^T$$

$$v = \left(v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, v_{X1}, v_{Y1}, v_{Z1}, v_{x2}, v_{y2}, v_{z2}, v_{X2}, v_{Y2}, v_{Z2}, \dots \dots \dots, v_{xn}, v_{yn}, v_{zn}, v_{Xn}, v_{Yn}, v_{Zn}\right)^T$$

$$t = -F(X_0, L_0) = \begin{pmatrix} F_{x0} \\ F_{y0} \\ F_{z0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)_0 & 0 & \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_3}\right)_0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial S}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial \theta_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial \theta_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial \theta_3}\right)_0 & 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_0 & \left(\frac{\partial H}{\partial \theta_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial H}{\partial \theta_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial H}{\partial \theta_3}\right)_0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} de\ orden\ 3n \times 7$$

donde:

$\frac{\partial F}{\partial S} = r_{11}x + r_{21}y + r_{31}z$ $\frac{\partial G}{\partial S} = r_{12}x + r_{22}y + r_{32}z$ $\frac{\partial H}{\partial S} = r_{13}x + r_{23}y + r_{33}z$

$\frac{\partial F}{\partial \theta_1} = 0$ $\frac{\partial G}{\partial \theta_1} = -S(r_{13}x + r_{23}y + r_{33}z)$ $\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = S(r_{12}x + r_{22}y + r_{32}z)$

$\frac{\partial F}{\partial \theta_2} = S(-x\sin\theta_2\cos\theta_3 + y\sin\theta_2\sin\theta_3 + z\cos\theta_2)$

$\frac{\partial G}{\partial \theta_2} = S(x\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - y\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 + z\sin\theta_1\sin\theta_2)$

$\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = S(-x\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 + y\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 - z\cos\theta_1\sin\theta_2)$

$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = S(r_{21}x - r_{11}y)$ $\frac{\partial G}{\partial \theta_3} = S(r_{22}x + r_{12}y)$ $\frac{\partial H}{\partial \theta_3} = S(r_{23}x - r_{13}y)$

$\frac{\partial F}{\partial T_x} = \frac{\partial G}{\partial T_y} = \frac{\partial H}{\partial T_z} = 1$

$\frac{\partial F}{\partial T_y} = \frac{\partial G}{\partial T_x} = \frac{\partial H}{\partial T_x} = \frac{\partial F}{\partial T_z} = \frac{\partial G}{\partial T_z} = \frac{\partial H}{\partial T_y} = 0$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} & \frac{\partial F}{\partial Z} & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} & \frac{\partial G}{\partial Z} & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial X} & \frac{\partial H}{\partial Y} & \frac{\partial H}{\partial Z} & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{de orden } 3n \times 6n$$

donde:

$\frac{\partial F}{\partial x} = Sr_{11}$; $\frac{\partial F}{\partial y} = Sr_{12}$; $\frac{\partial F}{\partial z} = Sr_{13}$

$\frac{\partial F}{\partial X} = -1$; $\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial Z} = 0$

$\frac{\partial G}{\partial x} = Sr_{21}$; $\frac{\partial G}{\partial y} = Sr_{22}$; $\frac{\partial G}{\partial z} = Sr_{23}$

$\frac{\partial G}{\partial X} = 0$; $\frac{\partial G}{\partial Y} = -1$; $\frac{\partial G}{\partial Z} = 0$

$\frac{\partial H}{\partial x} = Sr_{31}$; $\frac{\partial H}{\partial y} = Sr_{32}$; $\frac{\partial H}{\partial z} = Sr_{33}$

$\frac{\partial H}{\partial X} = 0$; $\frac{\partial H}{\partial Y} = 0$; $\frac{\partial H}{\partial Z} = -1$

2.1 Valores iniciales para el Ajuste Mixto Mínimos Cuadrados

Para realizar el ajuste mixto por mínimos cuadrados se necesitan unos valores iniciales de los parámetros desde los cuales partir. Para determinarlos tomaremos uno de los puntos del cual conocemos sus coordenadas en los dos sistemas de referencia y calcularemos las transformaciones que hay que realizar sobre dichos ejes para hacerlos coincidir. Sin embargo, para facilitar los cálculos supondremos el problema equivalente de considerar un mismo sistema de referencia en el que se dan dos puntos distintos *P* y *P’* y se quiere convertir uno en el otro. Para llevarlo a cabo se irán proyectando los puntos sobre los distintos planos y a continuación se irán rotando los ángulos que se vayan calculando.

Empezaremos deduciendo la rotación sobre el eje *Z* para lo cual proyectamos los puntos sobre el plano *XY*.

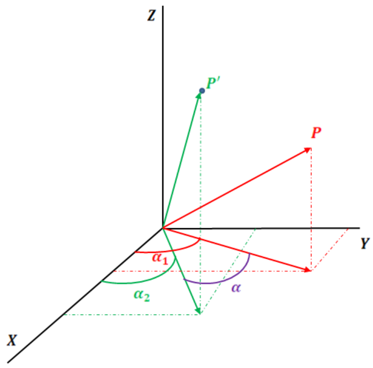

Figura.1

En la Figura.1 se observa que el giro que tendremos que hacer para transformar la proyección de *P’* en *P* viene dada por:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

siendo:

$$\alpha_1 = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\alpha_2 = \arctan\frac{Y}{X}$$

Una vez calculado α se gira *P*’ alrededor del eje *Z* dicho ángulo obteniendo un nuevo punto *P*’. Para este nuevo punto obtenido hay que deducir el ángulo que hay que rotar sobre el eje Y. El procedimiento se hace de forma análoga pero ahora la proyección de los puntos se hace sobre el eje XZ. El giro alrededor del eje Y vendrá dado por:

$$\beta = \beta_1 - \beta_2$$

siendo:

$$\beta_1 = \arctan\frac{x}{z}$$

$$\beta_2 = \arctan\frac{X}{Z}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se calcula por último la rotación sobre el eje X que vendrá dada por:

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$$

siendo:

$$\gamma_1 = \arctan\frac{z}{y}$$

$$\gamma_2 = \arctan\frac{Z}{Y}$$

2.2 Reducción de los datos a los Baricentros de cada sistema

Como ya señalamos en la introducción, en el caso en el que la diferencia entre los dos sistemas de referencia entre los que se quiere transformar sea muy grande, se puede producir un mal condicionamiento de la matriz del sistema de ecuaciones normales de manera que funcione el método que hemos detallado con anterioridad. Este fallo se puede obviar usando el modelo de Badekas-Molodensky que consiste en referenciar los datos a un origen que será el Baricentro de cada sistema de referencia realizando traslaciones y a partir de ahí realizar el ajuste mixto mínimos cuadrados para estimar los parámetros de la transformación. Finalizado el ajuste es necesario deshacer los cambios, esto es, deshacer las traslaciones.

2.3 Soluciones y Formulación del AJUSTE MIXTO

Una vez establecido el problema del Ajuste Mixto, donde las matrices $A \in \mathbb{R}^{c\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{c\times m}$, t y $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ (matriz de pesos) son conocidas, la solución viene dada a partir de la siguiente formulación:

- La estimación de los parámetros viene dada por:

$$\hat{x} = (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} t$$

donde

$$M = B P^{-1} B^T$$

- Los residuales estimados son:

$$\hat{v} = P^{-1} B^T M^{-1} (t - A\hat{x})$$

- La matriz de varianzas covarianzas de los parámetros $Var_{\hat{x}\hat{x}}$ viene dada por:

$$Var_{\hat{x}\hat{x}} = \widehat{\sigma_0}^2 Q_{\hat{x}\hat{x}}$$

donde $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ es la matriz cofactor de los parámetros que viene dada por:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1}, \;\; con \;\; N = A^T M^{-1} A$$

y la varianza a posteriori $\widehat{\sigma_0}^2$ es:

$$\widehat{\sigma_0}^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{c - n}$$

- Las observaciones ajustadas $\hat{L}$ vienen dadas por

$$\hat{L} = L + \hat{v}$$

donde L son las observaciones sin ajustar.

3 Transformación entre sistemas de referencia conocidos los 7 parámetros.

La relación entre las coordenadas de los puntos del sistema origen o local, que vamos a denotar (x_l, y_l, z_l) y las coordenadas en el sistema final o global, (X_g, Y_g, Z_g), como ya hemos visto en la sección anterior, viene dada por:

$$\begin{cases} X_g = S(r_{11}x_l + r_{21}y_l + r_{31}z_l) + T_x \\ Y_g = S(r_{12}x_l + r_{22}y_l + r_{32}z_l) + T_y \\ Z_g = S(r_{13}x_l + r_{23}y_l + r_{33}z_l) + T_z \end{cases}$$

De manera que conociendo las coordenadas en el sistema origen, y los parámetros de la transformación, esto es, las rotaciones, las traslaciones y el factor de escala se pueden obtener las coordenadas del punto en el sistema final.

Ahora bien, para transformar la matriz de varianzas covarianzas de las coordenadas en el sistema origen y obtener la matriz de varianzas covarianzas de las coordenadas en el sistema final es necesario usar la ley de propagación de la varianzas covarianzas, que nos dice que la nueva matriz de varianzas covarianzas transformada, $\sum_{x_G x_G}$, viene dada por:

$$\sum\nolimits_{x_G x_G} = J \sum\nolimits_{x_l x_l} J^T$$

donde J es la matriz Jacobiana y $\sum_{x_l x_l}$ es la matriz de varianzas covarianzas de las coordenadas en el sistema origen que podemos expresar como:

$$\sum\nolimits_{x_l x_l} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_{l1}}{}^2 & \sigma_{x_{l1}y_{l1}} & \sigma_{x_{l1}z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{x_{l1}z_{ln}} \\ \sigma_{y_{l1}x_{l1}} & \sigma_{y_l}{}^2 & \sigma_{y_{l1}z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{y_{l1}z_{ln}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{z_{ln}x_{l1}} & \sigma_{z_{ln}y_{l1}} & \sigma_{z_{ln}z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{z_{ln}}{}^2 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, si consideramos que no solo queremos transmitir los errores de las coordenadas en el sistema origen si no también queremos transmitir también los errores de los parámetros calculados, es decir los errores de las traslaciones, giros y factor de escala, tendremos que:

$$\sum\nolimits_{x_G x_G} = J\,A\,J^T$$

donde

- A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{x_{l1}}{}^2 & \sigma_{x_{l1}y_{l1}} & \sigma_{x_{l1}z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{x_{l1}z_{ln}} & \sigma_{x_{l1}S} & \sigma_{x_{l1}\theta_1} & \dots\dots\dots & \sigma_{x_{l1}T_z} \\ \sigma_{y_{l1}x_{l1}} & \sigma_{y_l}{}^2 & \sigma_{y_{l1}z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{y_{l1}z_{ln}} & \sigma_{y_{l1}S} & \sigma_{y_{l1}\theta_1} & \dots\dots\dots & \sigma_{y_{l1}T_z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{z_{ln}x_{l1}} & \sigma_{z_{ln}y_{l1}} & \sigma_{z_{ln}z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{z_{ln}}{}^2 & \sigma_{z_{ln}S} & \sigma_{z_{ln}\theta_1} & \dots\dots\dots & \sigma_{z_{ln}T_z} \\ \sigma_{Sx_{l1}} & \sigma_{Sy_{l1}} & \sigma_{Sz_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{Sz_{ln}} & \sigma_S{}^2 & \sigma_{S\,\theta_1} & \dots\dots\dots & \sigma_{S\,T_z} \\ \sigma_{\theta_1 x_{l1}} & \sigma_{\theta_1 y_{l1}} & \sigma_{\theta_1 z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{\theta_1 z_{ln}} & \sigma_{\theta_1 S} & \sigma_{\theta_1}{}^2 & \dots\dots\dots & \sigma_{\theta_1 T_z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{T_z x_{l1}} & \sigma_{T_z y_{l1}} & \sigma_{T_z z_{l1}} & \dots\dots\dots & \sigma_{T_z z_{ln}} & \sigma_{T_z S} & \sigma_{T_z \theta_1} & \dots\dots\dots & \sigma_{T_z}{}^2 \end{pmatrix}$$

que en realidad podemos descomponer en cuatro sub-matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{x_l x_l} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \sum_{pp} \end{pmatrix}$$

donde $\sum_{pp}$ es la matriz de varianzas covarianzas de los parámetros y viene dada por:

$$\sum_{pp} = \begin{pmatrix} \sigma_S{}^2 & \sigma_{S\,\theta_1} & \dots\dots\dots & \sigma_{S\,T_z} \\ \sigma_{\theta_1 S} & \sigma_{\theta_1}{}^2 & \dots\dots\dots & \sigma_{\theta_1 T_z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{T_z S} & \sigma_{T_z \theta_1} & \dots\dots\dots & \sigma_{T_z}{}^2 \end{pmatrix}$$

que se puede determinar del ajuste mínimos cuadrados de la transformación de 7 parámetros.

- J es la matriz Jacobiana que viene dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_{g_1}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial y_{l_1}} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial z_{l_1}} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial x_{l_2}} & \dots\dots & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial z_{l_n}} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial S} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial T_x} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial T_y} & \frac{\partial X_{g_1}}{\partial T_z} \\ \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial y_{l_1}} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial z_{l_1}} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial x_{l_2}} & \dots\dots & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial z_{l_n}} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial S} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial T_x} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial T_y} & \frac{\partial Y_{g_1}}{\partial T_z} \\ \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial y_{l_1}} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial z_{l_1}} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial x_{l_2}} & \dots\dots & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial z_{l_n}} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial S} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial T_x} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial T_y} & \frac{\partial Z_{g_1}}{\partial T_z} \\ \frac{\partial X_{g_2}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial y_{l_1}} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial z_{l_1}} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial x_{l_2}} & \dots\dots & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial z_{l_n}} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial S} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial T_x} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial T_y} & \frac{\partial X_{g_2}}{\partial T_z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial y_{l_1}} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial z_{l_1}} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial x_{l_2}} & \dots\dots & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial z_{l_n}} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial S} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial T_x} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial T_y} & \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial T_z} \end{pmatrix}$$

donde:

$\frac{\partial X_g}{\partial x_l} = Sr_{11}$; $\frac{\partial X_g}{\partial y_l} = Sr_{21}$; $\frac{\partial X_g}{\partial z_l} = Sr_{31}$

$\frac{\partial Y_g}{\partial x_l} = Sr_{12}$; $\frac{\partial Y_g}{\partial y_l} = Sr_{22}$; $\frac{\partial Y_g}{\partial z_l} = Sr_{32}$

$\frac{\partial Z_g}{\partial x_l} = Sr_{13}$; $\frac{\partial Z_g}{\partial y_l} = Sr_{23}$; $\frac{\partial Z_g}{\partial z_l} = Sr_{33}$

$$\frac{\partial X_g}{\partial S} = r_{11}x_l + r_{21}y_l + r_{31}z_l$$

$$\frac{\partial Y_g}{\partial S} = r_{12}x_l + r_{22}y_l + r_{32}z_l$$

$$\frac{\partial Z_g}{\partial S} = r_{13}x_l + r_{23}y_l + r_{33}z_l$$

$$\frac{\partial X_g}{\partial T_x} = \frac{\partial Y_g}{\partial T_y} = \frac{\partial Z_g}{\partial T_z} = 1$$

$$\frac{\partial X_g}{\partial T_y} = \frac{\partial X_g}{\partial T_z} = \frac{\partial Y_g}{\partial T_x} = \frac{\partial Y_g}{\partial T_z} = \frac{\partial Z_g}{\partial T_x} = \frac{\partial Z_g}{\partial T_y} = 0$$

$$\frac{\partial X_g}{\partial \theta_1} = S\left(\frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_1}x_l + \frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_1}y_l + \frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_1}z_l\right)$$

$$\frac{\partial X_g}{\partial \theta_2} = S\left(\frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_2}x_l + \frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_2}y_l + \frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_2}z_l\right)$$

$$\frac{\partial X_g}{\partial \theta_3} = S\left(\frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_3}x_l + \frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_3}y_l + \frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_3}z_l\right)$$

$$\frac{\partial Y_g}{\partial \theta_1} = S\left(\frac{\partial r_{12}}{\partial \theta_1}x_l + \frac{\partial r_{22}}{\partial \theta_1}y_l + \frac{\partial r_{32}}{\partial \theta_1}z_l\right)$$

$$\frac{\partial Y_g}{\partial \theta_2} = S\left(\frac{\partial r_{12}}{\partial \theta_2}x_l + \frac{\partial r_{22}}{\partial \theta_2}y_l + \frac{\partial r_{32}}{\partial \theta_2}z_l\right)$$

$$\frac{\partial Y_g}{\partial \theta_3} = S\left(\frac{\partial r_{12}}{\partial \theta_3}x_l + \frac{\partial r_{22}}{\partial \theta_3}y_l + \frac{\partial r_{32}}{\partial \theta_3}z_l\right)$$

$$\frac{\partial Z_g}{\partial \theta_1} = S\left(\frac{\partial r_{13}}{\partial \theta_1}x_l + \frac{\partial r_{23}}{\partial \theta_1}y_l + \frac{\partial r_{33}}{\partial \theta_1}z_l\right)$$

$$\frac{\partial Z_g}{\partial \theta_2} = S\left(\frac{\partial r_{13}}{\partial \theta_2}x_l + \frac{\partial r_{23}}{\partial \theta_2}y_l + \frac{\partial r_{33}}{\partial \theta_2}z_l\right)$$

$$\frac{\partial Z_g}{\partial \theta_3} = S\left(\frac{\partial r_{13}}{\partial \theta_3}x_l + \frac{\partial r_{23}}{\partial \theta_3}y_l + \frac{\partial r_{33}}{\partial \theta_3}z_l\right)$$

donde:

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_2} = -\sin\theta_2\cos\theta_3$$

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_3} = -\cos\theta_2\sin\theta_3$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \theta_1} = \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_3 = -\frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \theta_2} = \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \theta_3} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_3 = r_{22}$$

$$\frac{\partial r_{13}}{\partial \theta_1} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_3 = r_{12}$$

$$\frac{\partial r_{13}}{\partial \theta_2} = -\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3$$

$$\frac{\partial r_{13}}{\partial \theta_3} = \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_3 = r_{23}$$

$$\frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_2} = \sin\theta_2 \sin\theta_3$$

$$\frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_3} = -\cos\theta_1 \cos\theta_3 = -r_{11}$$

$$\frac{\partial r_{22}}{\partial \theta_1} = -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_3 = -r_{23}$$

$$\frac{\partial r_{22}}{\partial \theta_2} = -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3$$

$$\frac{\partial r_{22}}{\partial \theta_3} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_3 = -r_{12}$$

$$\frac{\partial r_{23}}{\partial \theta_1} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_3 = r_{22}$$

$$\frac{\partial r_{23}}{\partial \theta_2} = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3$$

$$\frac{\partial r_{23}}{\partial \theta_3} = \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_3 = -r_{13}$$

$$\frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_2} = \cos\theta_2$$

$$\frac{\partial r_{32}}{\partial \theta_1} = -\cos\theta_1 \cos\theta_2 = -r_{33}$$

$$\frac{\partial r_{32}}{\partial \theta_2} = \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\frac{\partial r_{33}}{\partial \theta_1} = -\sin\theta_2 \cos\theta_2 = r_{32}$$

$$\frac{\partial r_{33}}{\partial \theta_2} = -\cos\theta_1 \sin\theta_2$$

4 Referencias

Ghilani,C. D., 2010. “Adjustment computations spatial data analysis”.

Sevilla, M.J., 1986. “Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes geodésicas”, III Curso de Geodesia superior, 2, 2-69.

Sevilla, M.J., 1987. “Colocación Mínimos Cuadrados”, IV Curso de Geodesia Superior, 2, 97-141.