

ESTUDIO PLANIMÉTRICO DE LA VIABILIDAD Y DISEÑO DE LA RED GEODÉSICA DE PILARES EN EL CENTRO DE DESARROLLOS TECNOLÓGICOS DE YEBES

Beatriz Córdoba Hita, Javier López Ramasco

INFORME TÉCNICO IT - CDT 2017 - 3



Los desarrollos descritos en este informe técnico han sido cofinanciados por el Programa Operativo Fondo Tecnológico FEDER de la UE bajo el convenio IGN-MINECO denominado “Radiotelescopio de VLBI geodésico y astrométrico para su integración en la red VGOS (VGOSYEBES)”

Contenidos

1.	Introducción.....	2
2.	Descripción del Método.....	3
2.1.	Simulación de las observaciones:	3
2.2.	Cálculo del ajuste de la red:	4
2.2.1.	Ecuaciones de observación para los Azimutes	5
2.2.2.	Ecuaciones de observación para las Distancias	8
2.2.3.	Sistema de ecuaciones de observación Azimutes- Distancias.....	10
2.2.4.	Constreñimientos internos en las observaciones:	12
2.3.	Precisión alcanzada de la red del ajuste	13
2.3.1.	Elipses de error	14
2.3.2.	Cálculo de la desviación estándar de la distancia entre dos estaciones....	15
3.	Aplicación al diseño de la red de Yebes.....	17
3.1.	Simulación de medidas	17
3.2.	Resultados de la red geodésica propuesta.....	17
4.	Conclusiones.....	21
5.	Referencias	22

1. Introducción

Un requisito imprescindible para que una estación con distintas técnicas geodésicas se convierta en estación geodésica fundamental es relacionar las distintas técnicas mediante lo que se conoce como Local Tie consistente en vectores que unen las diferentes técnicas con 1 mm de precisión. El centro de Desarrollos Tecnológicos de Yebes dispone de dos antenas VLBI y dos antenas GNSS, YEBE, situada en el tejado del edificio de oficinas y YEB1 situada en el tejado del pabellón de gravimetría. Con el fin de unir todas las técnicas y obtener el local tie con la precisión requerida es imprescindible el diseño de una red geodésica local de pilares en el entorno del observatorio. Desde dichos pilares se medirán distancias y ángulos horizontales y cenitales con precisiones muy elevadas a partir de una estación total con el fin de ajustar la red y dar unas coordenadas a los pilares muy precisas que nos permitan el cálculo del local tie con la precisión que necesitamos.

En el diseño de una red geodésica local es necesario en primer lugar elegir los vértices de la red, realizar un estudio de las observaciones que se pueden realizar, de los instrumentos disponibles y de los métodos de observación para, de esta manera, poder fijar una estimación a priori de la precisión. Teniendo en cuenta todos estos factores se realiza una simulación que nos asegure que es posible obtener la precisión requerida a partir de la configuración creada.

En este informe se detalla el estudio planimétrico de la viabilidad de la red propuesta para lo cual se han creado varios programas. Uno que simula datos entre los vértices propuestos de la red y otro que calcula la red ajustada a partir de esos datos y la precisión de los resultados. El proceso es repetido para varias simulaciones siendo los resultados finalmente datos medios.

El diseño de la red en el Observatorio no ha sido una tarea fácil debido a la agreste vegetación del recinto. Se han intentado crear líneas base aproximadamente todas del mismo tamaño intentando que los triángulos fuesen lo más equiláteros posibles evitando la tala masiva de vegetación.

2. Descripción del Método

El primer paso en el diseño de una red es preseleccionar los vértices intentando formar triángulos equiláteros en la medida de lo posible, y de manera que desde cada vértice haya más de una visual (cuantas más visuales mejor). Una vez preseleccionada la red se simula cuál sería la precisión que podríamos alcanzar con ese diseño y con la metodología que utilizemos para medir la red. A continuación se explica el procedimiento realizado para realizar la simulación de los datos y el cálculo de la precisión alcanzada para una cierta configuración y una metodología de trabajo. En este estudio nos vamos a centrar únicamente en la planimetría, esto es, en las coordenadas x e y .

2.1. Simulación de las observaciones:

Para poder planificar la red micro-geodésica es necesario simular una serie de observaciones realizadas con una estación total que contengan unos errores accidentales y que se transmitan por todo el proceso de cálculo. Se ha elegido una distribución normal de probabilidad cuya media y desviación típica serán el valor exacto de la medida y el error en distancia/ángulo del instrumento escogido para realizar las observaciones correspondientes. El algoritmo utilizado para la generación de los errores aleatorios siguiendo una distribución normal ha sido el método de Box-Muller (G. E. P. Box and Mervin E. Müller, *A Note on the Generation of Random Normal Deviates*, The Annals of Mathematical Statistics (1958), Vol. 29, No. 2 pp. 610-611).

El método de Box-Muller (nombrado así por sus inventores George Edward Pelham Box y Mervin Edgar Müller 1958) es un método de generación de pares de números aleatorios independientes con distribución normal "estándar" (esperanza cero y varianza unitaria), a partir de una fuente de números aleatorios uniformemente distribuidos.

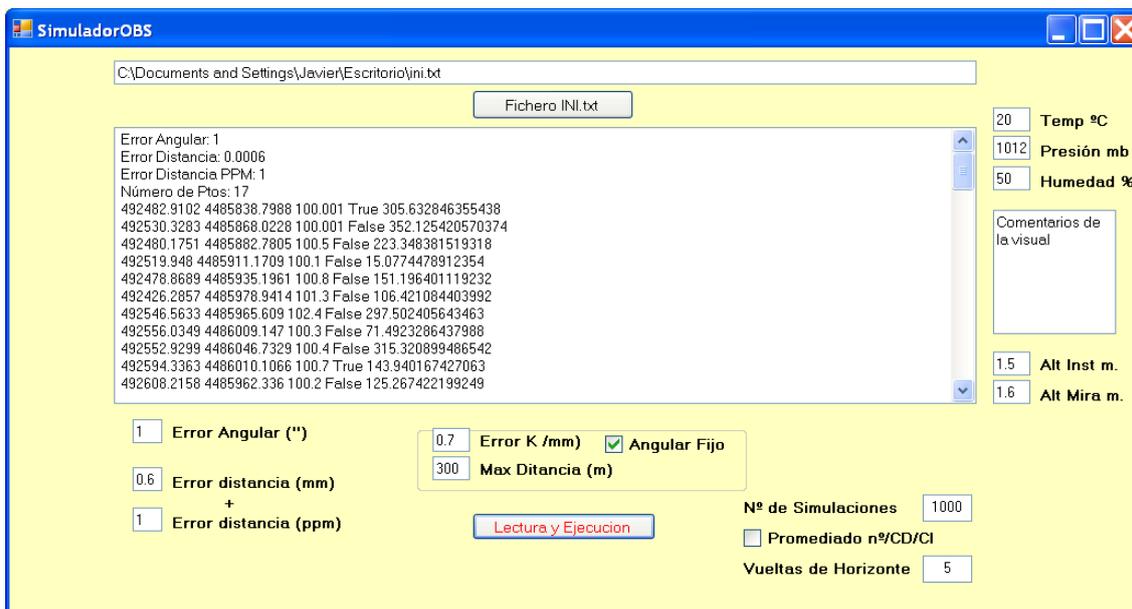
Para generar los datos simulados se ha creado un programa llamado SimuladorOBS. Utiliza un fichero ini.txt de configuración para el ajuste de la red donde se fijan:

- El número total de puntos (pilares) que componen la red.
- Las coordenadas de cada punto de la red.
- Las visuales mediante pares de números correspondientes a la numeración de dos pilares

En el programa se han de introducir los siguientes datos:

- Archivo ini.txt de configuración.
- Error Angular y de distancia.
- Posibilidad de fijar un error angular fijo hasta una distancia máxima.
- Parámetros meteorológicos como temperatura, presión y humedad.
- Altura del instrumento y de la mira.
- Número de simulaciones que se quieren generar para estudios estadísticos.
- Número de vueltas de horizonte.
- Opción de promediar las lecturas de círculo directo y círculo inverso.
- Comentarios

El programa tiene el siguiente aspecto



La salida es un fichero de texto con un listado de observaciones simuladas entre los distintos pilares que será utilizado por los diferentes programas de cálculo realizados en el C.D.T. de Yebes.

2.2. Cálculo del ajuste de la red:

Existen diversas metodologías para realizar el ajuste de una red geodésica. Entre ellas se encuentra el método de las ecuaciones de condición y el método de variación de coordenadas. Este último es el que utilizaremos para realizar el ajuste de nuestra red. Para ello es necesario partir de unas coordenadas a priori de las estaciones en un sistema de coordenadas rectangulares sobre un plano de una representación conforme y a partir de ellas mediante un ajuste mínimos cuadrados obtendremos las correcciones a esas coordenadas a priori que mejor se ajusten a las observaciones. La planimetría también se podría resolver sobre la superficie del elipsoide pero debido a que estamos usando una red local pequeña trabajaremos directamente en el plano.

Hay varias formas de proporcionar las coordenadas a priori de las estaciones: midiéndolas con GPS y transformando las coordenadas a un plano conforme usando por ejemplo la proyección UTM, a partir de las propias observaciones, partiendo de un punto fijo, un azimut fijo y una distancia fija o usando programas como AUTOCAD.

Para realizar el ajuste de una red hemos de partir de unas observaciones. Cuando en la red sólo observamos ángulos tendremos una triangulación, mientras que cuando sólo se observan distancias hablaremos de una trilateración. En el caso de medir ángulos y distancias tendremos una triangulateración.

En nuestro caso vamos a realizar simulaciones en las que sólo se midan ángulos, sólo se midan distancias o se midan ángulos y distancias simultáneamente y compararemos los resultados obtenidos y la precisión adquirida. Vamos a suponer en todo momento que las observaciones ya están corregidas de errores.

La existencia de modelos matemáticos singulares en la compensación de redes geodésicas ordinarias se presenta por diversas causas. Puede suceder que no se haya

fijado el origen del sistema de referencia, lo que da lugar a una indeterminación en traslación, también puede suceder que no se haya fijado la orientación de los ejes de dicho sistema por no disponer de ángulos de orientación de ningún lado de la red, lo que da lugar a una indeterminación en rotación, y también puede suceder que no se haya fijado ninguna distancia lo que produce una indeterminación en escala. En cualquiera de estas circunstancias se dice que tratamos con redes libres. Para que una red no fuese libre sería necesario o bien fijar dos estaciones o bien fijar una estación, un azimut (fija la orientación) y una línea base (fija la escala).

Si suponemos que en nuestra red no existe ningún vértice privilegiado de manera que no fijamos ninguno de ellos, ni tampoco ningún azimut estaremos en el caso de una red libre.

Como ya hemos señalado anteriormente en nuestro caso vamos a realizar el ajuste de la red usando el método de variación de coordenadas. Este método consiste en formar ecuaciones de la forma:

$$\text{Valor aproximado} + \text{corrección} - \text{valor observado} = \text{residuo}$$

Dependiendo de las observaciones que dispongamos se pueden generar dos tipos de ecuaciones de observación: las ecuaciones en azimut, si hemos observado lecturas horizontales, y las ecuaciones en distancia, si hemos observado distancias entre los distintos pilares. Veamos como procedemos para generar cada una de estas ecuaciones por separado y que posteriormente se pueden juntar en un mismo sistema si se han medido ambas magnitudes simultáneamente que resolveremos utilizando mínimos cuadrados.

2.2.1. Ecuaciones de observación para los Azimutes

En realidad con una estación total no se miden directamente azimutes sino que se observan lecturas horizontales. Esto es importante tenerlo en cuenta para introducir de forma correcta los datos dentro de las ecuaciones. Las ecuaciones de observación en este caso utilizando variación de coordenadas son:

$$v_i = \text{Azimut}_{\text{calculado}} + d(\text{Az}) - \text{Azimut}_{\text{observado}}$$

donde v_i son los residuales asociados a cada observación.

A continuación se describe el método de cálculo de cada parte integrante de la ecuación:

Cálculo de $d(\text{Az})$

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) coordenadas planas de dos puntos. Se puede calcular el azimut entre dichos puntos a partir de sus coordenadas como:

$$A = \arctan\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)$$

donde A es el azimut desde el punto de coordenadas (x_1, y_1) hasta el punto de coordenadas (x_2, y_2) .

Derivando dicha ecuación:

$$\begin{aligned} dA_z &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)^2} \cdot \frac{d(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - d(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\frac{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}{(y_2 - y_1)^2}} \cdot \frac{d(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - d(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

y llamando:

$$D^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$$

Llegamos a que:

$$\begin{aligned} dA_z &= \frac{1}{D^2} [d(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - d(y_2 - y_1)x_1] \\ dA_z &= \frac{1}{D^2} [(y_2 - y_1)dx_2 - (y_2 - y_1)dx_1 - (x_2 - x_1)dy_2 + (x_2 - x_1)dy_1] \end{aligned}$$

Esta expresión está expresada en radianes de manera que si se quiere pasar a segundos sexagesimales habrá que multiplicar por:

$$\sin 1'' = \frac{1}{206264}$$

Pero si lo queremos poner en grados sexagesimales habrá que multiplicar por:

$$\frac{180}{\pi}$$

De manera que dA_z en grados sexagesimales viene dada por la siguiente expresión:

$$dA_z = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{D^2} [(y_2 - y_1)dx_2 - (y_2 - y_1)dx_1 - (x_2 - x_1)dy_2 + (x_2 - x_1)dy_1]$$

Azimut calculado:

El azimut calculado se calcula a partir de las coordenadas a priori :

$$A = \arctan\left(\frac{x_f - x_i}{y_f - y_i}\right)$$

donde A es el azimut desde el punto de coordenadas (x_i, y_i) hasta el punto de coordenadas (x_f, y_f) .

Cuando se calcula el arco tangente de un ángulo es necesario saber el cuadrante en el que nos encontramos y en los casos que sea necesario sumar a la solución 360° o 180° según las siguientes condiciones:

$$\text{Si } \begin{cases} x_{f,k} - x_{i,k} > 0 \\ y_{f,k} - y_{i,k} > 0 \end{cases} \text{ no sumamos ningún valor.}$$

$$\text{Si } \begin{cases} x_{f,k} - x_{i,k} > 0 \\ y_{f,k} - y_{i,k} < 0 \end{cases} \text{ sumamos } 180^\circ.$$

$$\text{Si } \begin{cases} x_{f,k} - x_{i,k} < 0 \\ y_{f,k} - y_{i,k} < 0 \end{cases} \text{ sumamos } 180^\circ.$$

$$\text{Si } \begin{cases} x_{f,k} - x_{i,k} < 0 \\ y_{f,k} - y_{i,k} > 0 \end{cases} \text{ sumamos } 360^\circ.$$

Azimut observado

El azimut observado viene dado por la siguiente expresión:

$$Azimut_{observado} = l^s + \theta + dz$$

donde:

l^s es la lectura horizontal observada.

θ es la desorientación del cero del azimut.

dz es el error de desorientación del aparato. Es un término que es necesario añadir si no conocemos con exactitud la desorientación del Norte, esto es si el sistema de coordenadas (x, y) no está orientado al norte. Este término será en el sistema de ecuaciones una incógnita.

Es necesario partir también de unas desorientaciones a priori. Para calcularlas lo que se hace es en cada punto de estacionamiento se calcula para una visual elegida un θ_{calc} , que será usada para el resto de las visuales:

$$\theta_{calc} = Azimut_{calculado} - l^s$$

Existen algunos casos especiales a tener en cuenta:

Si $Azimut_{calculado} < l^s$ entonces:

$$\theta_{calc} = Azimut_{calculado} - l^s + 360$$

Si la suma de la lectura y el ángulo de desorientación calculado es mayor que 360° entonces:

$$Azimut_{observado} = l^s + \theta - 360^\circ + dz$$

Ecuación completa

Juntando todos los términos llegamos a obtener la siguiente ecuación:

$$v_k = Azimut_{calculado,k} + \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{D_k^2} [(y_{f,k} - y_{i,k})dx_f - (y_{f,k} - y_{i,k})dx_i - (x_{f,k} - x_{i,k})dy_f + (x_{f,k} - x_{i,k})dy_i] - l_k^s - \theta_i - dz$$

donde dx_i , dx_f , dy_i , dy_f y dz son las incógnitas, variaciones a las coordenadas.

2.2.2. Ecuaciones de observación para las Distancias

Las ecuación de observación en el caso de la distancia utilizando la variación de coordenadas es:

$$v_i = distancia_{calculado} + dD - distancia_{observada}$$

A continuación describimos el método de cálculo de cada parte integrante de la ecuación:

Cálculo de dD:

Partimos de la ecuación de distancia entre dos puntos de coordenadas en el plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

$$D^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$$

Diferenciando dicha ecuación:

$$2DdD = 2(x_2 - x_1)d(x_2 - x_1) + 2(y_2 - y_1)d(y_2 - y_1)$$

$$dD = \frac{(x_2 - x_1)}{D} d(x_2 - x_1) + \frac{(y_2 - y_1)}{D} d(y_2 - y_1)$$

Llegamos a que:

$$dD = \frac{(x_2 - x_1)}{D} dx_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{D} dx_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{D} dy_2 - \frac{(y_2 - y_1)}{D} dy_1$$

Distancia calculada

Con las coordenadas a priori se pueden obtener las distancias calculadas:

$$D^2 = (y_f - y_i)^2 + (x_f - x_i)^2$$

donde D es la distancia desde el punto de coordenadas (x_i, y_i) hasta el punto de coordenadas (x_f, y_f) .

Distancia observada:

Las distancias observadas, $d_{corr_{obs}}$, serán las lecturas realizadas con la estación total, d_{obs} , reducidas al suelo para lo cual es necesario multiplicarlas por el seno del ángulo de la distancia cenital, d_{cen} :

$$d_{corr_{obs}} = d_{obs} \cdot \sin(d_{cen})$$

Ecuación completa:

Juntando todos los términos llegamos a obtener la siguiente ecuación:

$$v_i = distancia_{calculado} + \left[\frac{(x_2 - x_1)}{D} dx_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{D} dx_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{D} dy_2 - \frac{(y_2 - y_1)}{D} dy_1 \right] - distancia_{observada}$$

Ahora bien si queremos combinar las ecuaciones de azimut con las ecuaciones de distancia es necesario homologar las ecuaciones para que todas estén en las mismas unidades. Por este motivo se multiplican las ecuaciones de observación de distancia por el siguiente factor:

$$\frac{180}{\pi \cdot D}$$

De manera que todo queda en grados sexagesimales. La ecuación en distancia final queda como:

$$v_i = \frac{180}{\pi \cdot D} distancia_{calculado} + \frac{180}{\pi} \left[\frac{(x_2 - x_1)}{D^2} dx_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{D^2} dx_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{D^2} dy_2 - \frac{(y_2 - y_1)}{D^2} dy_1 \right] - \frac{180}{\pi \cdot D} distancia_{observada}$$

2.2.3. Sistema de ecuaciones de observación Azimutes- Distancias

Juntando las ecuaciones de observación en azimut y en distancia formamos un sistema de ecuaciones de observación que resolveremos mediante mínimos cuadrados con el fin de obtener correcciones a las coordenadas aproximadas y desorientaciones. El sistema será de la forma:

$$A \cdot x = b$$

donde:

x es el vector de incógnitas que será el número de estaciones multiplicado por dos más el número de ángulos de desorientación. En cada estacionamiento habrá un ángulo de desorientación distinto.

$$x = (dx_1, dy_1, dx_2, dy_2, \dots, dx_n, dy_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

b el vector de términos independientes que será el vector:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

donde:

b_1 es el vector de términos independientes para las ecuaciones de azimut:

$$b_1 = v_k - Azimut_{calculado,k} + l_k^s$$

b_2 es el vector de términos independientes para las ecuaciones de distancia:

$$b_2 = v_i - \frac{180}{\pi \cdot D} distancia_{calculado} + \frac{180}{\pi \cdot D} distancia_{observada}$$

A es la matriz de dimensiones $n_{observaciones} \times 2n$ dada por:

$$A = \left(\frac{180}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{-(y_{f,k} - y_{i,k})}{D_k^2} & \frac{(y_{f,k} - y_{i,k})}{D_k^2} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \frac{(x_{f,k} - x_{i,k})}{D_k^2} & -\frac{(x_{f,k} - x_{i,k})}{D_k^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{(x_{f,k} - x_{i,k})}{D_k^2} & -\frac{(y_{f,k} - y_{i,k})}{D_k^2} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \frac{(x_{f,k} - x_{i,k})}{D_k^2} & \frac{(y_{f,k} - y_{i,k})}{D_k^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \right)$$

donde n es el número de estaciones.

La solución mínimos cuadrados de este sistema viene dada por:

$$\hat{x} = N^{-1}A^T P b \quad \text{donde } N = A^T P A \text{ y } P \text{ es la matriz de pesos}$$

La matriz de pesos P se deduce a partir de las desviaciones de las observaciones.

Las desviaciones individuales de los ángulos y las distancias observadas en principio serán la precisión con la que mida el aparato, aunque en el caso real a los errores de estas medidas hay que sumarles otros errores de medición y además cada medida es la media de varias medidas individuales por lo que la desviación también variará en función de estos motivos. Si partimos de que ya conocemos estas desviaciones, lo primero que hay que hacer es calcular la desviación de la distancia reducida. Para ello partimos de que la distancia reducida viene dada por:

$$d_{corr_{obs}} = d_{obs} \cdot \sin(d_{cen})$$

Por lo tanto si consideramos:

$$\frac{\partial d_{corr_{obs}}}{\partial d_{obs}} = \sin(d_{cen})$$

$$\frac{\partial d_{corr_{obs}}}{\partial d_{cen}} = d_{obs} \cos(d_{cen})$$

entonces:

$$\sigma_{d_{corr_{obs}}} = \sqrt{(\sigma_{d_{obs}} \frac{\partial d_{corr_{obs}}}{\partial d_{obs}})^2 + (\frac{\partial d_{corr_{obs}}}{\partial d_{cen}} \sigma_{d_{cen}})^2}$$

Donde $\sigma_{d_{cen}}$ es necesario pasarlo a radianes para tenerlo todo en las mismas unidades.

Ahora bien, como en la matriz de pesos las medidas han de estar homogeneizadas, lo que haremos será transformar la desviación de las distancias a las mismas unidades que la desviación de los ángulos, que son grados. Para ello tendremos que aplicar la siguiente fórmula:

$$\sigma_{d_{corr_{obs_grados}}} = \frac{\sigma_{d_{corr_{obs}}}}{d_{corr_{obs}}} \cdot \rho$$

donde ρ transforma los radianes a grados por lo tanto en este caso es:

$$\rho = \frac{180}{\pi}$$

De esta manera la matriz de pesos viene dada por:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{\alpha_1}^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_{\alpha_n}^2} & & \\ & & \frac{1}{\sigma_{d_{corr_{obs_grados1}}^2}} & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_{d_{corr_{obs_gradosn}}^2}} \end{pmatrix}$$

Observemos que los pesos dependen de las varianzas de las observaciones. Cuanto más pequeña es la varianzas mayor es el peso que se asigna a la observación asociada.

2.2.4. Constreñimientos internos en las observaciones

Al tratar nuestra red como una red libre y no fijar ninguna estación la matriz A será no invertible y no podremos dar soluciones al problema. En estos casos es necesario añadir constreñimientos para obtener una solución al problema. Existen diversas formas de añadir constreñimientos. Entre ellos se encuentran los constreñimientos externos que son condiciones físicas externas al problema. Dentro de los constreñimientos llamamos constreñimientos mínimos al mínimo número de constreñimientos necesario para que la matriz A sea de rango completo. Vamos a llamar constreñimientos internos a aquellos constreñimientos mínimos de la forma:

$$Ex - t_c = 0$$

que se añaden a las ecuaciones de observación

$$\begin{cases} Ax - t = v \\ Ex - t_c = 0 \end{cases}$$

y que verifican indistintamente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{AE}^T &= \mathbf{0} \\ \mathbf{NE}^T &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Esto es lo mismo que decir la matriz E es el nucleo o Ker de la matriz A .

Las soluciones obtenidas con el uso de constreñimientos internos gozan de la propiedad de que la traza de la matriz de covarianzas a posteriori de los parámetros es mínima lo que implica que las soluciones estimadas son de mínima varianza.

En general t_c se elige como $t_c = 0$, ya que en este caso la solución obtenida tiene además norma mínima entre todas las soluciones con constreñimiento interno. De manera que al final nuestro sistema constreñido es de la forma:

$$\begin{cases} Ax - t = v \\ Ex = 0 \end{cases}$$

Las soluciones al sistema constreñido vienen dadas por:

$$\hat{x} = RA^T Pt$$

donde:

$$R = (N + E^T E)^{-1} N (N + E^T E)^{-1}$$

Blaha interpretó geoméricamente los constreñimientos internos. En el caso del plano los constreñimientos nos dicen que la posición media (baricentro) del conjunto de puntos antes y después de la compensación se conserva y que la suma de las hipotéticas rotaciones medias de todos los puntos es cero por lo que la orientación media del sistema de referencia también se conserva.

2.3. Precisión alcanzada de la red del ajuste

Una vez resuelto el ajuste es necesario comprobar la calidad del mismo. Para ello se analiza la precisión de los parámetros. Para calcular las precisiones del ajuste, se calcula el vector de residuos a posteriori que viene dado por:

$$\hat{v} = A\hat{x} - t = ARA^T Pt - t$$

La varianza a posteriori del peso unidad es:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m - r}$$

donde m es el número de ecuaciones de observación y r es el número de parámetros independientes.

La matriz cofactor de los parámetros viene dado por:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = R$$

Y la matriz de varianzas covarianzas:

$$\sum_{xx} = \sigma_0^2 Q_{xx}$$

Esta matriz permite obtener a partir de la raíz cuadrada de su diagonal principal las precisiones de los valores ajustados en las mismas unidades en las que se ha realizado el ajuste.

2.3.1. Elipses de error

Si nos centramos en las componentes de los errores aleatorios de las medidas que siguen una distribución normal centrada en el origen (0,0) podemos usar el modelo de distribución normal bidimensional para estudiar las precisiones de las coordenadas ajustadas a partir de las elipses de error.

Para calcular las elipses de error lo que se hace es tomar la matriz de varianzas covarianzas para cada estación, esto es, de la matriz de varianzas covarianzas total extraemos σ_x , σ_y , σ_{xy} y σ_{yx} y formamos la matriz:

$$\Sigma_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

De esta matriz, que ha de ser simétrica, se deducen los autovalores, λ_1 y λ_2 que dan lugar a una matriz diagonal y por lo tanto a partir de ellos deducimos el semieje mayor y menor de la elipse de error que buscada. De esta manera:

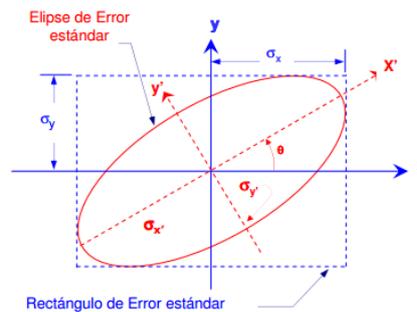
$$a = \sqrt{\lambda_1}$$

$$b = \sqrt{\lambda_2}$$

La orientación de la elipse viene dada por:

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

Según los signos del numerador y el denominador se deduce el cuadrante y por lo tanto la solución.



De esta manera la elipse de error correspondiente será:

$$\frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^2} = c^2$$

Por lo tanto un punto estará dentro de la elipse si:

$$\frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^2} \leq c^2$$

Si consideramos la variable aleatoria:

$$U = \frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^2}$$

Se puede demostrar que la variable aleatoria U sigue una Chi-Cuadrado:

$$U \cong \chi^2$$

Por lo tanto la probabilidad de que los valores dados x' e y' se encuentren dentro de la elipse de error será:

$$P \left[\frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^2} \leq c^2 \right] = P[U \leq c^2]$$

En realidad la elipse la podemos escribir como:

$$\frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2 c^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^2 c^2} = 1$$

En cuyo caso los semiejes son $c\sigma_{x'}$ y $c\sigma_{y'}$, de manera que si queremos que la probabilidad de caer dentro de la elipse de error sea del 99%, esto es:

$$P \left[\frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^2} \leq c^2 \right] = P[U \leq c^2] = 0.99$$

Hay que buscar en este caso el c^2 en la tabla de la Chi-Cuadrado que cumpla tal condición que se corresponde con 3. Por lo tanto en este caso los semiejes de las elipses serán de 3 sigma.

2.3.2. Cálculo de la desviación estándar de la distancia entre dos estaciones

Una vez que tenemos ajustada la red si queremos calcular la distancia entre dos estaciones (x_A, y_A) y (x_B, y_B) a partir de las coordenadas ajustadas bastará usar la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Pero si queremos saber la precisión con la que estamos calculando dicha distancia, debido a que las coordenadas tienen su propia precisión dada en la matriz de varianzas covarianzas del ajuste, será necesario usar la propagación de errores. De esta manera la matriz A vendrá dada por:

$$A = \left(\frac{\partial d}{\partial x_A} \quad \frac{\partial d}{\partial y_A} \quad \frac{\partial d}{\partial x_B} \quad \frac{\partial d}{\partial y_B} \right)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x_A} &= \frac{-(x_B - x_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \\ \frac{\partial d}{\partial y_A} &= \frac{-(y_B - y_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \\ \frac{\partial d}{\partial x_B} &= \frac{(x_B - x_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \\ \frac{\partial d}{\partial y_B} &= \frac{(y_B - y_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \end{aligned}$$

Si llamamos Q a la matriz de varianzas covarianzas en este caso que será:

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_{x_A}^2 & \sigma_{x_A y_A} & \sigma_{x_A x_B} & \sigma_{x_A y_B} \\ \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{y_A}^2 & \sigma_{y_A x_B} & \sigma_{y_A y_B} \\ \sigma_{x_B x_A} & \sigma_{x_B y_A} & \sigma_{x_B}^2 & \sigma_{x_B y_B} \\ \sigma_{y_B x_A} & \sigma_{y_B y_A} & \sigma_{y_B x_B} & \sigma_{y_B}^2 \end{pmatrix}$$

De manera que la desviación típica de la distancia viene dada por:

$$\sigma_d^2 = A \cdot Q \cdot A^T$$

3. Aplicación al diseño de la red de Yebes

Para llevar a cabo una planificación de la distribución de los pilares de la red geodésica en el observatorio de Yebes se han simulado observaciones con errores aleatorios que siguen una distribución normal para distintas posibles configuraciones en el recinto del observatorio. Las configuraciones probadas han sido realizadas teniendo en cuenta la vegetación existente en el observatorio evitando la tala masiva de árboles entre los que se encuentran encinas, pinos y olivos. Otro inconveniente en el observatorio son los edificios construidos que limitan las visuales así como la instalación del GNSS en el tejado del edificio de oficinas. Por este motivo los triángulos propuestos en la configuración se alejan de ser equiláteros en algunas ocasiones.

3.1. Simulación de medidas

Para comprobar la precisión de una cierta configuración se ha seguido el siguiente proceso:

- En primer lugar se han simulado las observaciones, eligiendo los errores aleatorios en distancias y ángulos, así como el número de simulaciones que se quieren realizar para una determinada configuración. En nuestro caso se ha supuesto un error de 0.6 mm más las partes por millón en distancia y un error angular de 1 segundo en distancias superiores a 300 metros y alrededor de 2.5 segundos en distancias inferiores.
- Para cada simulación se ajusta la red libre obteniendo las coordenadas ajustadas y la precisión de la red a partir de las elipses de error.
- Para cada configuración se han realizado 100 simulaciones, y con los resultados se ha realizado una media de los resultados y de las elipses de error.

3.2. Resultados de la red geodésica propuesta

En la siguiente fotografía se muestra la red geodésica de pilares propuesta para realizar el cálculo del local tie entre las diferentes técnicas de observación del observatorio:

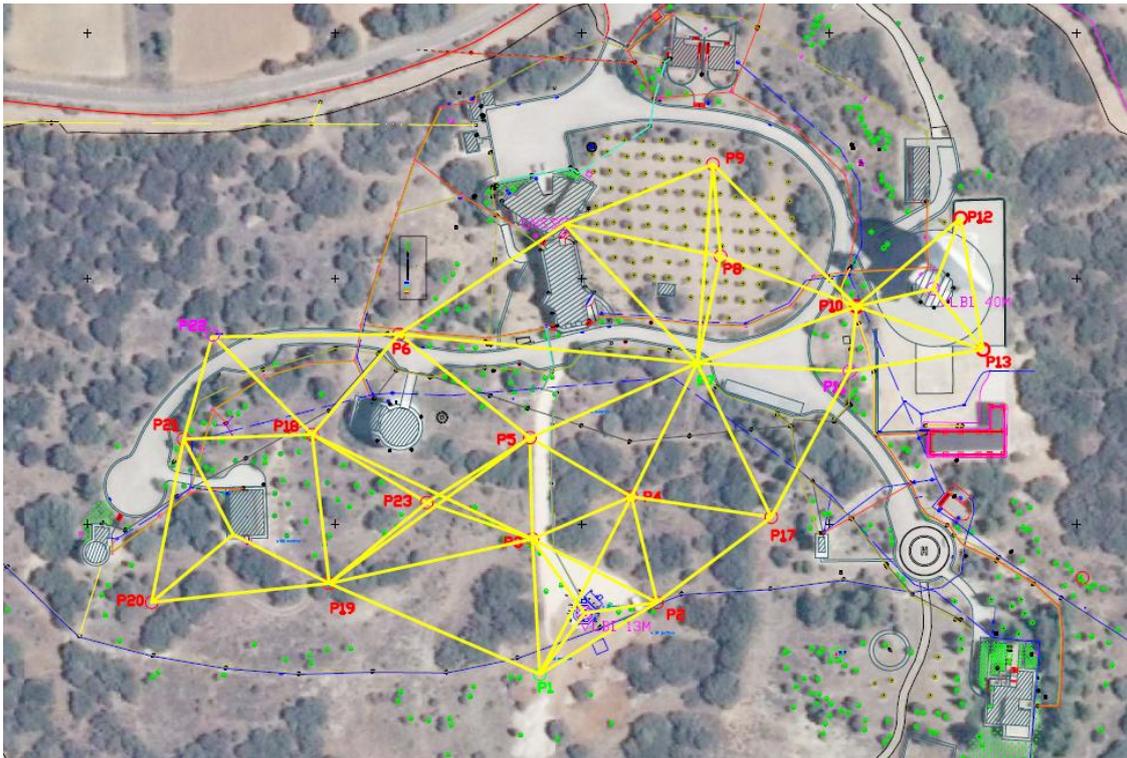


Figura 3.1. Configuración propuesta para la red de pilares

La red cuenta con un total de 24 vértices de entre los cuales se tienen dos estaciones GNSS y dos antenas VLBI. En los restantes veinte vértices se pretenden construir pilares desde los cuales lanzar las medidas. Los vértices han sido situados de manera que las distintas técnicas geodésicas de medición, GNSS y VLBI queden rodeadas por visuales, y exista una conexión entre todas las técnicas. Sin embargo hay que señalar que en el caso de la estación GNSS, YEBE, situada en el techo del edificio de oficinas existe un ángulo desde el cual es imposible la visualización de la antena GPS. Además, en la propuesta de la red se ha intentado minimizar la tala de árboles colocando los vértices de la red en posiciones con la mayor visibilidad posible, aunque existen zonas donde la abundante vegetación ha hecho difícil este cometido.

El ajuste de la red a partir de las observaciones simuladas se ha llevado a cabo con diferentes metodologías. En primer lugar resolviendo una triangulación, esto es, utilizando solo medidas simuladas de ángulos, a continuación resolviendo una trilateración, esto es utilizando sólo medidas simuladas de distancias y por último utilizando medidas simuladas de ángulos y distancias simultáneamente resolviendo lo que se conoce como una triangulateración. En la siguiente tabla se recoge la precisión que se puede llegar a alcanzar del local tie entre todas las técnicas a partir de distintos tipos de ajustes:

Precisiones en metros	Triangulación	Trilateración	Triangulateriación
VLBI40-VLBI13	0.004	0.002	0.0009
VLBI40-GNSS (YEBE)	0.004	0.002	0.0008
GNSS (YEBE)- GNSS (YEB1)	0.003	0.0016	0.0007
VLBI13- GNSS (YEB1)	0.002	0.0012	0.0007
VLBI13- GNSS (YEBE)	0.003	0.0016	0.0007
VLBI40- GNSS (YEB1)	0.003	0.002	0.0008

Se puede observar que la mejor precisión la obtenemos siempre utilizando medidas de ángulos y distancias.

A continuación se muestran las coordenadas ajustadas y las elipses de error generadas con cada una de las metodologías.

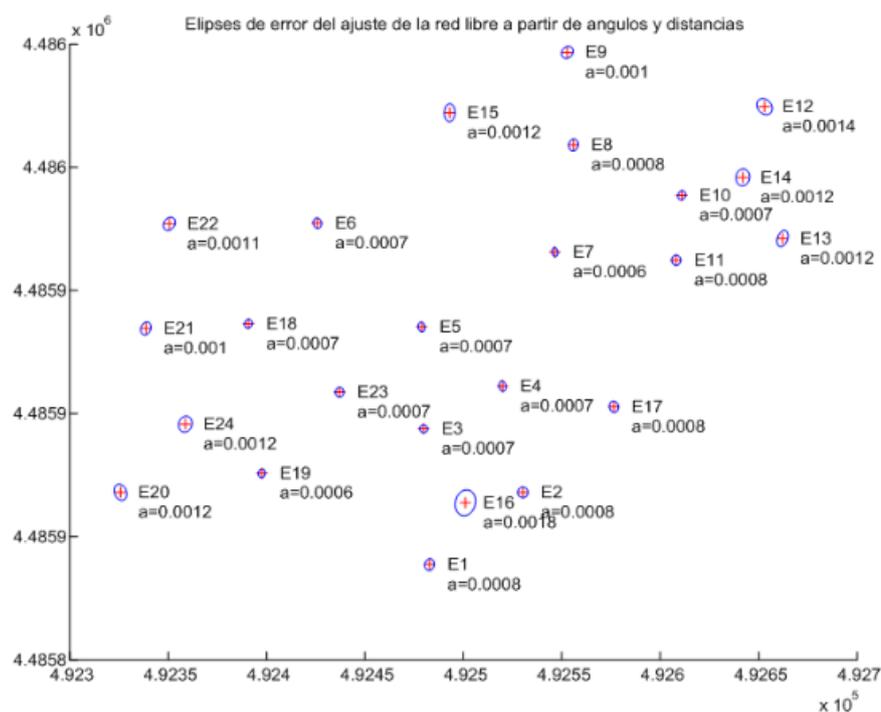


Figura 3.2. Elipses de error utilizando ángulos y distancias

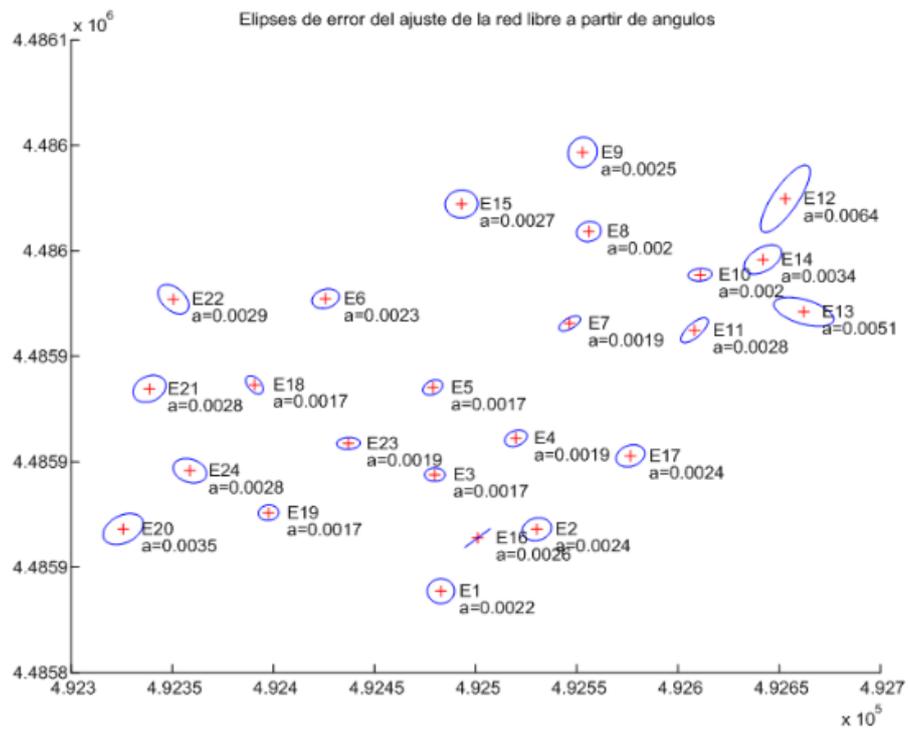


Figura 3.3. Elipses de error utilizando sólo ángulos

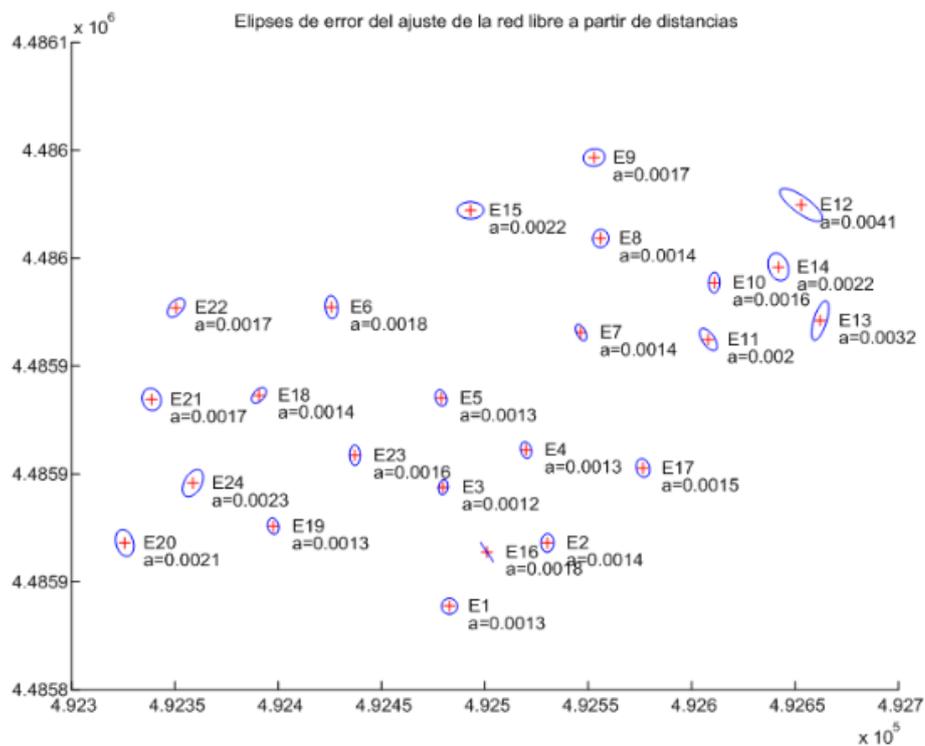


Figura 3.4. Elipses de error utilizando sólo distancias

4. Conclusiones

En el presente informe se ha estudiado la viabilidad de la creación de una red geodésica de pilares en el recinto del Centro de Desarrollos Tecnológicos de Yebes con el fin de obtener el local tie entre las distintas técnicas geodésicas pertenecientes al observatorio con una precisión de 1 mm. Se ha llegado a la conclusión de que dicha configuración es posible con un total de 24 vértices entre los cuales se incluyen las distintas técnicas geodésicas, midiendo desde cada uno de ellos ángulos y distancias, esto es, formando una triangulación que conecte todas las técnicas.

5. Referencias

Camacho,A.G., Martín,M.D., 1986. “Constreñimientos internos en la compensación de estaciones,” 13, 42-46.

Ghilani,C.D., 2010. “Adjustment computation spatial data analysis”

Henneberg,H.,1986. “Redes geodésicas de alta precisión. III Curso de Geodesia Superior,” 2. 123-196.

Linkwitz,H.,1986. “Compensación de grandes redes geodésicas. III Curso de Geodesia Superior,”2, 72-121.

Martín, F., 1990.”Geodesia y cartografía matemática.”

Sevilla, M.J., 1986. “Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes geodésicas”, III Curso de Geodesia superior, 2, 2-69.

Sevilla, M.J., 1987. “Colocación Mínimos Cuadrados”, IV Curso de Geodesia Superior, 2, 97-141.

Sevilla, M.J., 2003. “Ajuste con Constreñimientos”, Seminario de geodesia Superior.

Sevilla, M.J., 2005. “Ajuste de redes libres. Modelos matemáticos singulares”.