

**ACTUALIZACIÓN DEL CÁLCULO DEL PUNTO INVARIANTE  
DE UN RADIOTELESCOPIO. MÉTODO DE AJUSTE CLÁSICO  
POR CÍRCULOS. NUEVAS MEDIDAS EN EL  
RADIOTELESCOPIO RAEGE DEL OBSERVATORIO DE YEBES**

Beatriz Córdoba Hita, Javier López Ramasco

INFORME TÉCNICO IT - CDT 2017 - 2



Los desarrollos descritos en este informe técnico han sido cofinanciados por el Programa Operativo Fondo Tecnológico FEDER de la UE bajo el convenio IGN-MINECO denominado “Radiotelescopio de VLBI geodésico y astrométrico para su integración en la red VGOS (VGOSYEBES)”



## Contenidos

Contenidos.....	I
1 Introducción.....	1
2 Descripción del Método.....	2
2.1 Ajuste del eje de azimut.....	2
2.2 Cálculo de los ejes de elevación .....	9
2.3 Proyección sobre el eje de azimut.....	9
2.4 Cálculo de los parámetros de los ejes del radiotelescopio.....	10
2.4.1 Cálculo del punto invariante.....	10
2.4.2 Cálculo de la excentricidad.....	14
2.4.3 Cálculo de la inclinación del eje de azimut .....	15
2.4.4 Cálculo del ángulo de no ortogonalidad .....	16
3 Estudio estadístico de residuales y eliminación de errores groseros .....	19
3.1 Test de normalidad de los residuales .....	19
3.2 Test para detectar sistematismos en las observaciones.....	19
3.3 Test de detección de errores groseros .....	20
4 Aplicación al Radiotelescopio RAEGE.....	21
4.1 Toma de medidas .....	21
4.1.1 Metodología 1.....	21
4.1.2 Metodología 2.....	22
4.2 Resultados de las medidas .....	23
4.2.1 Resultados obtenidos a partir del método 1 .....	23
4.2.2 Resultados obtenidos a partir del método 2.....	27
4.2.3 Transformación a sistemas globales y comparación de resultados entre los dos métodos. ....	30
4.3 Estudio de la precisión del multi-prisma a partir de las medidas desde los pilares a la antena de 13 metros.....	31
5 Conclusiones.....	33
6 Referencias .....	34

## **1 Introducción**

La posición del punto de referencia invariante es muy importante para la determinación del local tie que conecta todas las técnicas geodésicas en un observatorio. Se define como la intersección entre el eje de azimut y el de elevación de un radiotelescopio y en el caso de que no intersequen, es la proyección del eje de elevación sobre el eje de azimut. Normalmente este punto es inaccesible o no está materializado. Existen diversos métodos para realizar su cálculo. El más clásico de estos métodos, que vamos a utilizar para calcular el punto invariante del radiotelescopio de 13 metros, construido recientemente en el Observatorio, es el ajuste de puntos medidos sobre la estructura del radiotelescopio bajo ciertas condiciones o constreñimientos a unos círculos 3D. En este modelo el radiotelescopio es rotado alrededor de uno de sus ejes dejando el otro fijo, de manera que la trayectoria de cada marcador corresponde a un círculo. Este proceso se repite para distintas orientaciones del radiotelescopio y para ambos ejes. Las mediciones de estos puntos se han realizado con dos metodologías distintas, desde el interior de la cabina y desde los pilares exteriores, comparando ambos resultados.

## 2 Descripción del Método

El método para calcular el punto invariante consta de cuatro pasos:

- I. Determinar el eje de azimut a partir de medidas que se ajustan a círculos horizontales. Para conseguir cada círculo se han de medir las coordenadas tridimensionales del marcador moviendo la antena en azimut. Cada círculo corresponde a una elevación distinta. Se utiliza un marcador que se adosa magnéticamente en la cara interna de cada uno de los dos contrapesos dentro de la cabina de azimut.
- II. Determinar los ejes de elevación. Para ello lo que se hace es fijado un azimut mover el radiotelescopio a distintas elevaciones. Para cada azimut quedan definidos dos arcos de círculos verticales ya que se miden ambos contrapesos. Con los centros de los arcos se genera el eje de elevación.
- III. Proyectar los ejes de elevación sobre el eje de azimut calculado en el primer paso.
- IV. Cálculo de los parámetros de la antena: coordenadas del punto invariante, excentricidad, inclinación del eje de azimut sobre la normal y ángulo de falta de ortogonalidad entre los diferentes ejes de elevación y el de azimut.

### 2.1 Ajuste del eje de azimut

El objetivo es, dado un conjunto de coordenadas en tres dimensiones ajustar dichos puntos a diversos círculos que son paralelos unos a otros y por tanto todos ellos han de compartir el mismo vector normal. Una circunferencia en el espacio viene dada por la intersección de un plano con una esfera. Por este motivo hemos de ajustar los datos simultáneamente tanto a la ecuación de una esfera como a la ecuación de un plano a través de un Ajuste Mixto con constreñimientos. Esto implica que para cada circunferencia se han de ajustar 7 parámetros, tres que son las coordenadas del centro de la esfera, el radio que se puede deducir a partir de las anteriores, y tres parámetros que definen la ecuación de un plano. Además se debe imponer el constreñimiento de que el centro de la circunferencia ha de pertenecer al plano. Si tenemos  $m$  círculos el número total de parámetros que tendremos que estimar será  $5 * m + 2$ . El vector normal es el que mejor se ajuste a la vez a todos los planos.

#### AJUSTE MIXTO

Consideremos las dos ecuaciones que queremos ajustar para cada círculo:

- La ecuación de la esfera:

$$F(L, X) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

donde  $(a, b, c)$  es el centro de la circunferencia y  $r$  es el radio.

- La ecuación del plano que dependiendo de la componente del vector normal que queramos fijar se puede escribir de tres maneras distintas:

- Si fijamos la componente  $z$ :

$$G(L, X) = AA * x + BB * y + CC - z = 0$$

donde el vector normal del plano viene dado por  $(AA, BB, -1)$ .

- Si fijamos la componente  $x$ :

$$G(L, X) = -x + AA + BB * y + CC * z = 0$$

donde el vector normal del plano viene dado por  $(-1, BB, CC)$ .

- Si fijamos la componente  $y$ :

$$G(L, X) = AA * x + BB - y + CC * z = 0$$

donde el vector normal del plano viene dado por  $(AA, -1, CC)$ .

De manera que nuestro modelo funcional es de la forma:

$$FF(X, L) = 0$$

donde  $FF(X, L) = \begin{pmatrix} F(L, X) \\ G(L, X) \end{pmatrix}$ ,  $X$  es el vector de parámetros ajustados y  $L$  es el vector de valores ajustados de las observaciones.

Para estimar los parámetros  $(a, b, c)$ ,  $r$ ,  $AA$ ,  $BB$ ,  $CC$ , para cada círculo se han de ajustar las observaciones a través del Ajuste Mixto de Mínimos Cuadrados, esto es, tenemos que llegar a un sistema de la forma:

$$Ax + Bv - t$$

donde:

$Ax$  representa las ecuaciones de observación, a partir de las cuales se van a estimar los parámetros, esto es  $(a, b, c)$ ,  $r$ ,  $AA$ ,  $BB$ ,  $CC$ , que vienen dados en el vector  $x$ .

$Bv$  representa las ecuaciones de condición y sirve para estimar, ajustar las observaciones que vienen dadas por vector  $v$ .

$t$  es el vector de términos independientes.

**Linealización del modelo:**

Debido a que nuestro modelo  $FF(X, L) = 0$  no es lineal, en primer lugar debemos linealizarlo. El método de linealización por la fórmula de Taylor aplicada a la función de dos variables nos conduce a la siguiente expresión:

$$FF(X_0, L_0) + \left. \frac{\partial FF}{\partial X} \right|_{X_0, L_0} (X - X_0) + \left. \frac{\partial FF}{\partial L} \right|_{X_0, L_0} (L - L_0) = 0$$

donde:

$X$  es el vector de parámetros ajustados.

$X_0$  es el vector de valores aproximados de los parámetros  $X$  en torno al cual se hace el desarrollo de Taylor.

$L$  es el vector de valores ajustados de las observaciones.

$L_0$  es el vector de valores aproximados de las observaciones.

Si llamamos  $\left. \frac{\partial FF}{\partial X} \right|_{X_0, L_0} = A$  y  $\left. \frac{\partial FF}{\partial L} \right|_{X_0, L_0} = B$ , y  $x = X - X_0$  entonces obtenemos que:

$$F(X_0, L_0) + Ax + B(L - L_0) = 0$$

Si llamamos  $l$  al vector de observaciones reales y  $v = L - l$  al vector de errores residuales, llegamos a:

$$F(X_0, L_0) + Ax + B(l + v - L_0) = 0$$

entonces:

$$Ax + Bv = -F(X_0, L_0) - Bl + BL_0$$

Si tomamos  $L_0$  como las propias observaciones entonces obtenemos:

$$Ax + Bv = -F(X_0, L_0)$$

Y llamando  $t = -F(X_0, L_0)$ , llegamos al sistema de la forma:

$$Ax + Bv = t$$

**Cálculo de la Matriz A:**

La matriz A se obtiene calculando las parciales respecto de los parámetros tanto de la ecuación de la esfera como de la ecuación del plano.

- Ecuación de la Esfera:  $\frac{\partial F}{\partial X}|_{X_0, L_0}$

$$F(L, X) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2(x - a); \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -2(y - b); \quad \frac{\partial F}{\partial c} = -2(z - c); \quad \frac{\partial F}{\partial r} = -2r;$$

- Ecuación del plano:  $\frac{\partial G}{\partial X}|_{X_0, L_0}$

- Si fijamos la componente z:  $G(L, X) = AA * x + BB * y + CC - z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial AA} = x; \quad \frac{\partial G}{\partial BB} = y; \quad \frac{\partial G}{\partial CC} = 1$$

- Si fijamos la componente x:  $G(L, X) = -x + AA + BB * y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial AA} = 1; \quad \frac{\partial G}{\partial BB} = y; \quad \frac{\partial G}{\partial CC} = z$$

- Si fijamos la componente y:  $G(L, X) = AA * x + BB - y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial AA} = x; \quad \frac{\partial G}{\partial BB} = 1; \quad \frac{\partial G}{\partial CC} = z$$

Por lo tanto si  $n$  es el número total de observaciones,  $m$  es el número de círculos y  $p = 5 * m + 2$  el número total de parámetros la matriz A de dimensión  $2n \times p$  vendrá dada por (escribimos la matriz sólo en el caso en el que para calcular el plano se fije la componente z):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial a}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r}|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r}|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial a}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r}|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial a}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r}|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial G}{\partial AA}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial BB}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial CC}|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial G}{\partial AA}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial BB}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial CC}|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial G}{\partial AA}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial BB}|_{x_0, l_0} & 0 & \frac{\partial G}{\partial CC}|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$



Y el vector de parámetros  $x$  de dimensión  $p$  será:

$$x = (a_1 - a_0 \quad b_1 - b_0 \quad c_1 - c_0 \quad r_1 - r_0 \quad a_1 - a_0 \quad b_2 - b_0 \quad c_2 - c_0 \quad r_2 - r_0 \quad \dots \quad r_n - r_0 \quad AA \quad BB \quad CC_1 \quad \dots \quad CC_m)^T$$

### Cálculo de la Matriz B

Para ello tenemos que calcular las parciales respecto de las observaciones tanto de la esfera como del plano:

- Ecuación de la esfera:  $\left. \frac{\partial F}{\partial L} \right|_{X_0, L_0}$

$$F(L, X) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

Las derivadas parciales respecto de las observaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - a); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - b); \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - c);$$

- Ecuación del plano:  $\left. \frac{\partial G}{\partial L} \right|_{X_0, L_0}$

- Si fijamos la componente  $z$ :  $G(L, X) = AA * x + BB * y + CC - z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = AA; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = BB; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -1$$

- Si fijamos la componente  $x$ :  $G(L, X) = -x + AA + BB * y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = BB; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = CC$$

- Si fijamos la componente  $y$ :  $G(L, X) = AA * x + BB - y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = AA; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = CC$$

Por lo tanto la matriz B de dimensión  $2n \times 3n$  viene dada por:

$$B = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{x_0, L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{x_0, L_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{x_0, L_0} \\ \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{x_0, L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{x_0, L_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{x_0, L_0} & \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{x_0, L_0} \end{pmatrix}$$

Y el vector  $v$  de residuales de dimensión  $3n$  viene dado por:

$$v = (v_{1x} \quad v_{1y} \quad v_{1z} \quad v_{2x} \quad v_{2y} \quad v_{2z} \quad \dots \quad v_{nx} \quad v_{ny} \quad v_{nz})^T$$

El vector  $t$  vendrá dado por:

$$t = -FF(X_0, L_0)$$

**Soluciones:**

La solución mínimos cuadrados de un ajuste mixto viene dado por:

$$\hat{x} = (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} t \quad \text{donde } M^{-1} = B P^{-1} B^T$$

$$\hat{v} = P^{-1} B^T M^{-1} (t - A \hat{x})$$

**CONSTREÑIMIENTOS**

Ahora bien, la solución que nos da del centro de la esfera no es única, porque hay muchos centros posibles en el espacio que cumplan la ecuación de la esfera por estar todos a la misma distancia. Por este motivo es necesario añadir un constreñimiento a nuestras ecuaciones. El constreñimiento va a ser que el centro de la esfera debe pertenecer al plano estimado:

- Fijando la componente  $z$ :

$$H = AA \cdot a + BB \cdot b + CC - c = 0$$

- Fijando la componente  $x$ :

$$H = AA * a + BB * b + CC - c = 0$$

- Fijando la componente  $y$ :

$$H = AA * a + BB - b + CC * c = 0$$

Para cada centro tendremos una ecuación por tanto en total tendremos  $m$  ecuaciones que se corresponde con el número de círculos que tenemos.

Por tanto a nuestro ajuste mixto de la forma:

$$Ax + Bv = t$$

tenemos que añadir el constreñimiento

$$Hx = H_0$$

**Linealización de los constreñimientos:**

Debido a que  $H$  no es una función lineal es necesario linealizarla respecto de los parámetros. (Aquí expondremos sólo los resultados en el caso en el que se fija el eje  $z$ ):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = AA; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = BB; \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -1; \quad \frac{\partial H}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial AA} = a; \quad \frac{\partial H}{\partial BB} = b; \quad \frac{\partial H}{\partial CC} = 1$$

**Cálculo de la Matriz H:**

Por lo tanto la matriz  $H$  de dimensión  $m \times p$  viene dada por (escribimos la matriz sólo en el caso en el que para calcular el plano se fije la componente  $z$ ):

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial a} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial b} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial c} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{x_0, L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial AA} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial BB} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial CC} \Big|_{x_0, L_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial a} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial b} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial c} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{x_0, L_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial AA} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial BB} \Big|_{x_0, L_0} & 0 & \frac{\partial H}{\partial BB} \Big|_{x_0, L_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial a} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial b} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial c} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial AA} \Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial H}{\partial BB} \Big|_{x_0, L_0} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial H}{\partial BB} \Big|_{x_0, L_0} \end{pmatrix}$$

Y el vector  $x$  es el mismo vector de parámetros que describimos anteriormente.

El vector  $H_0$  viene dado por:

$$H_0 = H(X_0, L_0)$$

**Soluciones:**

La formulación correspondiente al ajuste mixto con constreñimientos en los parámetros viene dada por:

$$\begin{aligned} M &= BP^{-1}B^T \\ N &= A^T M^{-1}A \\ \hat{x}_c &= \hat{x} + \Delta\hat{x} \end{aligned}$$

Donde  $\hat{x}$  es la solución del ajuste mixto realizado con anterioridad y  $\Delta\hat{x}$  es la corrección a esa solución para que se cumpla el constreñimiento:

$$\hat{x} = N^{-1}A^T M^{-1}t$$

$$\Delta\hat{x} = N^{-1}H^T(HN^{-1}H^T)^{-1}(H_0 - H\hat{x})$$

Los residuales a las observaciones vienen dadas por:

$$\hat{v} = P^{-1}B^T M^{-1}(t - A\hat{x}_c)$$

La estimación de la varianza a priori de la unidad de peso es:

$$\sigma_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{cc + ss - nn}$$

donde  $cc = Rango(B)$ ,  $nn = Rango(A)$  y  $ss = Rango(H)$ .

La matriz cofactor a posteriori de los parámetros es:

$$Q_{xx} = N^{-1} - N^{-1}H^T(HN^{-1}H^T)^{-1}HN^{-1}$$

## 2.2 Cálculo de los ejes de elevación

Para calcular los ejes de elevación lo que se hace es fijado un azimut mover la antena en distintas elevaciones. Para cada elevación queda definido un arco de círculo. Como se utilizan dos marcadores, con los centros de los arcos descritos por los dos marcadores para el mismo azimut se genera el eje de elevación. Para calcular los centros de los arcos se realiza el mismo Ajuste Mixto que en el apartado anterior pero para un solo círculo.

## 2.3 Proyección sobre el eje de azimut

Una vez conocido el eje de azimut (vector director y punto), para calcular el punto invariante lo que se hace es, calculados los ejes de elevación (definidos por un vector director y un punto), la proyección ortogonal de cada uno de los ejes de elevación sobre el eje de azimut. Esto se realiza calculando la perpendicular común a ambas rectas. Para ello vamos a llamar  $P = (P_1, P_2, P_3)$  a un punto del eje de azimut y  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  a su vector director. Las ecuaciones paramétricas de esta recta serán:

$$\begin{cases} x = P_1 + \lambda u_1 \\ y = P_2 + \lambda u_2 \\ z = P_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$

Un punto genérico de esta recta es por tanto  $(P_1 + \lambda u_1, P_2 + \lambda u_2, P_3 + \lambda u_3)$ .

Cada eje de elevación queda definido con un punto  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$  y un vector director  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = Q_1 + \mu v_1 \\ y = Q_2 + \mu v_2 \\ z = Q_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Y por lo tanto un punto genérico del eje de elevación será:

$$(Q_1 + \mu v_1, Q_2 + \mu v_2, Q_3 + \mu v_3)$$

El vector que une los dos puntos  $P$  y  $Q$  tiene que ser ortogonal tanto al vector director del eje de azimut como al vector director del eje de elevación, por lo tanto sus respectivos productos escalares han de ser cero.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (Q_1 + \mu v_1 - P_1 - \lambda u_1, Q_2 + \mu v_2 - P_2 - \lambda u_2, Q_3 + \mu v_3 - P_3 - \lambda u_3)$$

Como  $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$  entonces:

$$(Q_1 + \mu v_1 - P_1 - \lambda u_1)u_1 + (Q_2 + \mu v_2 - P_2 - \lambda u_2)u_2 + (Q_3 + \mu v_3 - P_3 - \lambda u_3)u_3 = 0$$

Como  $\overline{PQ} \cdot \vec{v} = 0$  entonces:

$$(Q_1 + \mu v_1 - P_1 - \lambda u_1)v_1 + (Q_2 + \mu v_2 - P_2 - \lambda u_2)v_2 + (Q_3 + \mu v_3 - P_3 - \lambda u_3)v_3 = 0$$

Por lo tanto:

$$\lambda(-u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + \mu(v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3) = -(Q_1 - P_1)u_1 - (Q_2 - P_2)u_2 - (Q_3 - P_3)u_3$$

$$\lambda(-v_1u_1 - v_2u_2 - v_3u_3) + \mu(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = -(Q_1 - P_1)v_1 - (Q_2 - P_2)v_2 - (Q_3 - P_3)v_3$$

Llamando:

$$\begin{aligned} A &= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \\ B &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \\ C &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ D &= -(Q_1 - P_1)u_1 - (Q_2 - P_2)u_2 - (Q_3 - P_3)u_3 \\ E &= -(Q_1 - P_1)v_1 - (Q_2 - P_2)v_2 - (Q_3 - P_3)v_3 \end{aligned}$$

Formamos el sistema

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

Una vez que tenemos  $\lambda$  y  $\mu$  el punto proyectado sobre el eje de azimut va a ser

$$P = (P_1 + \lambda u_1, P_2 + \lambda u_2, P_3 + \lambda u_3)$$

## 2.4 Cálculo de los parámetros de los ejes del radiotelescopio

La orientación de los ejes del radiotelescopio queda definida por siete parámetros: las tres coordenadas del punto invariante, la excentricidad, dos parámetros que definen la inclinación del eje de azimut de la antena y el ángulo de falta de ortogonalidad entre el eje de azimut y el de elevación. A continuación se detalla la forma de calcularlos:

### 2.4.1 Cálculo del punto invariante

Hemos visto que cada eje de elevación produce una proyección sobre el eje de azimut, así pues, calcularemos el punto invariante como la media de esas proyecciones.

Para el cálculo de la desviación asociada al punto invariante tenemos que tener en cuenta la propagación de errores. Primero calcularemos la desviación de cada proyección y luego la desviación de la media.

Empezaremos calculando la desviación de cada punto proyectado que viene dado por:

$$P = (P_1 + \lambda u_1, P_2 + \lambda u_2, P_3 + \lambda u_3)$$

Por lo tanto necesitamos conocer los errores de  $P = (P_1, P_2, P_3)$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\lambda$ .

Sabemos que:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = \frac{1}{AC + B^2} \begin{pmatrix} C & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \cdot D + B \cdot E \\ -B \cdot D + A \cdot E \end{pmatrix}$$

De manera que finalmente obtenemos que:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C \cdot D + B \cdot E}{AC + B^2} \\ \frac{-B \cdot D + A \cdot E}{AC + B^2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{C \cdot D + B \cdot E}{AC + B^2}$$

Y su desviación estándar será:

$$\sigma_\lambda^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial C}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial E}\right)^2 \sigma_E^2$$

De manera que:

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda^2 &= \left(\frac{-C(C \cdot D + B \cdot E)}{(AC + B^2)^2}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{E(AC + B^2) - 2B(C \cdot D + B \cdot E)}{(AC + B^2)^2}\right)^2 \sigma_B^2 \\ &\quad + \left(\frac{D(AC + B^2) - A(C \cdot D + B \cdot E)}{(AC + B^2)^2}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{C}{AC + B^2}\right)^2 \sigma_D^2 \\ &\quad + \left(\frac{B}{AC + B^2}\right)^2 \sigma_E^2 \end{aligned}$$

Y:

$$\mu = \frac{-B \cdot D + A \cdot E}{AC + B^2}$$

Y su desviación estándar será:

$$\sigma_\mu^2 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial E}\right)^2 \sigma_E^2$$

De manera que:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu}^2 = & \left( \frac{E(AC + B^2) - C(-B \cdot D + A \cdot E)}{(AC + B^2)^2} \right)^2 \sigma_A^2 \\ & + \left( \frac{-D(AC + B^2) - 2B(-B \cdot D + A \cdot E)}{(AC + B^2)^2} \right)^2 \sigma_B^2 \\ & + \left( \frac{-A(-B \cdot D + A \cdot E)}{(AC + B^2)^2} \right)^2 \sigma_C^2 + \left( \frac{-B}{AC + B^2} \right)^2 \sigma_D^2 + \left( \frac{A}{AC + B^2} \right)^2 \sigma_E^2\end{aligned}$$

Para lo cual tenemos que calcular  $\sigma_A^2$ ,  $\sigma_B^2$ ,  $\sigma_C^2$ ,  $\sigma_D^2$  y  $\sigma_E^2$ .

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}A &= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \\ B &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \\ C &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ D &= -(Q_1 - P_1)u_1 - (Q_2 - P_2)u_2 - (Q_3 - P_3)u_3 \\ E &= -(Q_1 - P_1)v_1 - (Q_2 - P_2)v_2 - (Q_3 - P_3)v_3\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= \left( \frac{\partial A}{\partial u_1} \right)^2 \sigma_{u_1}^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial u_2} \right)^2 \sigma_{u_2}^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial u_3} \right)^2 \sigma_{u_3}^2 \\ &= (-2u_1)^2 \sigma_{u_1}^2 + (-2u_2)^2 \sigma_{u_2}^2 + (-2u_3)^2 \sigma_{u_3}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_B^2 &= \left( \frac{\partial B}{\partial u_1} \right)^2 \sigma_{u_1}^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial u_2} \right)^2 \sigma_{u_2}^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial u_3} \right)^2 \sigma_{u_3}^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial v_1} \right)^2 \sigma_{v_1}^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial v_2} \right)^2 \sigma_{v_2}^2 \\ &+ \left( \frac{\partial B}{\partial v_3} \right)^2 \sigma_{v_3}^2 = v_1^2 \sigma_{u_1}^2 + v_2^2 \sigma_{u_2}^2 + v_3^2 \sigma_{u_3}^2 + u_1^2 \sigma_{v_1}^2 + u_2^2 \sigma_{v_2}^2 + u_3^2 \sigma_{v_3}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_C^2 = \left( \frac{\partial C}{\partial v_1} \right)^2 \sigma_{v_1}^2 + \left( \frac{\partial C}{\partial v_2} \right)^2 \sigma_{v_2}^2 + \left( \frac{\partial C}{\partial v_3} \right)^2 \sigma_{v_3}^2 = (2v_1)^2 \sigma_{v_1}^2 + (2v_2)^2 \sigma_{v_2}^2 + (2v_3)^2 \sigma_{v_3}^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_D^2 &= \left( \frac{\partial D}{\partial Q_1} \right)^2 \sigma_{Q_1}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial Q_2} \right)^2 \sigma_{Q_2}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial Q_3} \right)^2 \sigma_{Q_3}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial P_1} \right)^2 \sigma_{P_1}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial P_2} \right)^2 \sigma_{P_2}^2 \\ &+ \left( \frac{\partial D}{\partial P_3} \right)^2 \sigma_{P_3}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial u_1} \right)^2 \sigma_{u_1}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial u_2} \right)^2 \sigma_{u_2}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial u_3} \right)^2 \sigma_{u_3}^2 \\ &= (-u_1)^2 \sigma_{Q_1}^2 + (-u_2)^2 \sigma_{Q_2}^2 + (-u_3)^2 \sigma_{Q_3}^2 + u_1^2 \sigma_{P_1}^2 + u_2^2 \sigma_{P_2}^2 + u_3^2 \sigma_{P_3}^2 \\ &+ (-(Q_1 - P_1))^2 \sigma_{u_1}^2 + (-(Q_2 - P_2))^2 \sigma_{u_2}^2 + (-(Q_3 - P_3))^2 \sigma_{u_3}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_E^2 &= \left(\frac{\partial E}{\partial Q_1}\right)^2 \sigma_{Q_1}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial Q_2}\right)^2 \sigma_{Q_2}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial Q_3}\right)^2 \sigma_{Q_3}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial P_1}\right)^2 \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial P_2}\right)^2 \sigma_{P_2}^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial E}{\partial P_3}\right)^2 \sigma_{P_3}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial u_1}\right)^2 \sigma_{v_1}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial u_2}\right)^2 \sigma_{v_2}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial u_3}\right)^2 \sigma_{v_3}^2 \\
 &= (-v_1)^2 \sigma_{Q_1}^2 + (-v_2)^2 \sigma_{Q_2}^2 + (-v_3)^2 \sigma_{Q_3}^2 + v_1^2 \sigma_{P_1}^2 + v_2^2 \sigma_{P_2}^2 + v_3^2 \sigma_{P_3}^2 \\
 &\quad + (-(Q_1 - P_1)^2) \sigma_{v_1}^2 + (-(Q_2 - P_2)^2) \sigma_{v_2}^2 + (-(Q_3 - P_3)^2) \sigma_{v_3}^2
 \end{aligned}$$

Ahora bien como:

$$P = (P_1 + \lambda u_1, P_2 + \lambda u_2, P_3 + \lambda u_3)$$

Si llamamos:

$$P_x = P_1 + \lambda u_1$$

$$P_y = P_2 + \lambda u_2$$

$$P_z = P_3 + \lambda u_3$$

$$\sigma_{P_x}^2 = \left(\frac{\partial P_x}{\partial P_1}\right)^2 \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{\partial P_x}{\partial \lambda}\right)^2 \sigma_{\lambda}^2 + \left(\frac{\partial P_x}{\partial u_1}\right)^2 \sigma_{u_1}^2 = \sigma_{P_1}^2 + u_1^2 \sigma_{\lambda}^2 + \lambda^2 \sigma_{u_1}^2$$

$$\sigma_{P_y}^2 = \left(\frac{\partial P_y}{\partial P_2}\right)^2 \sigma_{P_2}^2 + \left(\frac{\partial P_y}{\partial \lambda}\right)^2 \sigma_{\lambda}^2 + \left(\frac{\partial P_y}{\partial u_2}\right)^2 \sigma_{u_2}^2 = \sigma_{P_2}^2 + u_2^2 \sigma_{\lambda}^2 + \lambda^2 \sigma_{u_2}^2$$

$$\sigma_{P_z}^2 = \left(\frac{\partial P_z}{\partial P_3}\right)^2 \sigma_{P_3}^2 + \left(\frac{\partial P_z}{\partial \lambda}\right)^2 \sigma_{\lambda}^2 + \left(\frac{\partial P_z}{\partial u_3}\right)^2 \sigma_{u_3}^2 = \sigma_{P_3}^2 + u_3^2 \sigma_{\lambda}^2 + \lambda^2 \sigma_{u_3}^2$$

Por último se calcula la media de los puntos proyectados y se calcula la desviación estándar de la media:

$$\bar{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i$$

$$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{P_i}^2}$$

Otra manera de calcular la desviación estándar del punto invariante sería:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Donde  $n$  es el número de observaciones y  $\bar{x}$  es la media de todas las observaciones.



### 2.4.2 Cálculo de la excentricidad

La excentricidad se define como la distancia ortogonal entre el eje de azimut y el de elevación del radiotelescopio. Para determinarla se calcula la distancia de cada eje de elevación sobre al eje de azimut y a continuación se promedian las distancias. Para el cálculo de la desviación estándar se procede del mismo modo que para el punto invariante a través de la propagación de errores.

Así:

$$e = |Q_{min} - P_{proy}| = \sqrt{(Q_{minx} - P_{proyx})^2 + (Q_{miny} - P_{proyy})^2 + (Q_{minz} - P_{proyz})^2}$$

Por lo tanto su desviación será:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 = & \left(\frac{\partial e}{\partial Q_{minx}}\right)^2 \sigma_{Q_{minx}}^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial Q_{miny}}\right)^2 \sigma_{Q_{miny}}^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial Q_{minz}}\right)^2 \sigma_{Q_{minz}}^2 \\ & + \left(\frac{\partial e}{\partial P_{proyx}}\right)^2 \sigma_{P_{proyx}}^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial P_{proyy}}\right)^2 \sigma_{P_{proyy}}^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial P_{proyz}}\right)^2 \sigma_{P_{proyz}}^2 \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{\partial e}{\partial Q_{minx}} = \frac{Q_{minx} - P_{proyx}}{e}$$

$$\frac{\partial e}{\partial Q_{miny}} = \frac{Q_{miny} - P_{proyy}}{e}$$

$$\frac{\partial e}{\partial Q_{minz}} = \frac{Q_{minz} - P_{proyz}}{e}$$

$$\frac{\partial e}{\partial P_{proyx}} = \frac{P_{proyx} - Q_{minx}}{e}$$

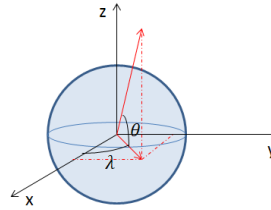
$$\frac{\partial e}{\partial P_{proyy}} = \frac{P_{proyy} - Q_{miny}}{e}$$

$$\frac{\partial e}{\partial P_{proyz}} = \frac{P_{proyz} - Q_{minz}}{e}$$

### 2.4.3 Cálculo de la inclinación del eje de azimut

Teniendo en cuenta que en un sistema tridimensional:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \lambda \\ y = r \cos \theta \sin \lambda \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$



donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\theta$  es la latitud y  $\lambda$  es el azimut contado desde el eje  $x$ , entonces la inclinación con respecto de la normal (eje  $z$ ) viene dada:

$$\theta = 90^\circ \pm \arcsen\left(\frac{z}{r}\right)$$

Para calcular la desviación estándar de  $\theta$  hay que utilizar la ley de propagación de errores. Primeramente hemos de calcular la desviación estándar de  $r$  y a continuación la de  $\theta$ .

Para ello se calculan las parciales de  $r$  respecto  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto la desviación estándar al cuadrado ( $\sigma_r^2$ ) viene dada por:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2$$

Para calcular la desviación estándar de  $\theta$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{-z}{r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2$$

El azimut respecto al eje  $x$ , ( $\lambda$ ) viene dada por:

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para calcular la desviación estándar:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{1}{x \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_\lambda^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2$$

#### 2.4.4 Cálculo del ángulo de no ortogonalidad

Suponiendo que  $\vec{u}$  sea el vector director del eje de azimut y  $\vec{v}$  el vector director del eje de elevación el ángulo de no ortogonalidad entre el eje de azimut y el eje de elevación ejes se calcula a partir de la definición del producto escalar:

$$\cos(\widehat{uv}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

donde:

$$|\vec{u}| = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$|\vec{v}| = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Para el cálculo de la desviación estándar se procede del mismo modo que para el punto invariante a través de la propagación de errores, para lo cual lo primero que tenemos que hacer es calcular la desviación de  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$ .

$$\sigma_{|\vec{u}|}^2 = \left(\frac{\partial |\vec{u}|}{\partial u_1}\right)^2 \sigma_{u_1}^2 + \left(\frac{\partial |\vec{u}|}{\partial u_2}\right)^2 \sigma_{u_2}^2 + \left(\frac{\partial |\vec{u}|}{\partial u_3}\right)^2 \sigma_{u_3}^2$$

donde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial|\vec{u}|}{\partial u_1} &= \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \\ \frac{\partial|\vec{u}|}{\partial u_2} &= \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \\ \frac{\partial|\vec{u}|}{\partial u_3} &= \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}\end{aligned}$$

y

$$\sigma_{|\vec{v}|}^2 = \left(\frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_1}\right)^2 \sigma_{v_1}^2 + \left(\frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_2}\right)^2 \sigma_{v_2}^2 + \left(\frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_3}\right)^2 \sigma_{v_3}^2$$

donde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_1} &= \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_2} &= \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_3} &= \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\end{aligned}$$

Calculamos ahora la desviación del producto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Por lo tanto:

$$\sigma_{\vec{u} \cdot \vec{v}}^2 = v_1^2 \sigma_{u_1}^2 + v_2^2 \sigma_{u_2}^2 + v_3^2 \sigma_{u_3}^2 + u_1^2 \sigma_{v_1}^2 + u_2^2 \sigma_{v_2}^2 + u_3^2 \sigma_{v_3}^2$$

Calculamos ahora la desviación de  $xx = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

$$\sigma_{xx}^2 = \left(\frac{\partial xx}{\partial |\vec{u}|}\right)^2 \sigma_{|\vec{u}|}^2 + \left(\frac{\partial xx}{\partial |\vec{v}|}\right)^2 \sigma_{|\vec{v}|}^2 + \left(\frac{\partial xx}{\partial (\vec{u} \cdot \vec{v})}\right)^2 \sigma_{(\vec{u} \cdot \vec{v})}^2$$

donde:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial xx}{\partial |\vec{u}|}\right) &= \frac{-|\vec{v}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{(|\vec{u}||\vec{v}|)^2} \\ \left(\frac{\partial xx}{\partial |\vec{v}|}\right) &= \frac{-|\vec{u}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{(|\vec{u}||\vec{v}|)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial xx}{\partial (\vec{u} \cdot \vec{v})} = \frac{1}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Por último como:

$$\widehat{uv} = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

entonces la desviación de  $\widehat{uv}$  es:

$$\sigma_{uv}^2 = \left( \frac{-1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \right)^2}} \right)^2 \sigma_{xx}^2$$

### 3 Estudio estadístico de residuales y eliminación de errores groseros

En el ajuste de los datos a cada círculo tanto para el cálculo de los ejes de elevación como para el del eje de azimut es necesario hacer un estudio estadístico de los datos y eliminar aquellos errores groseros que puedan perturbar la medida en caso de haberlos. Para ello hay que constatar algunas hipótesis:

- Si el vector de residuos sigue o no una distribución normal.
- Si la esperanza de los residuos es cero, lo que equivale a decir que no existen errores sistemáticos ni groseros.
- Las precisiones a priori de las observaciones han de ser consistentes con los resultados a posteriori.

Para ello se han realizado los siguientes Test de Hipótesis:

#### 3.1 Test de normalidad de los residuales

Con este test se comprueba si los residuales tipificados (residual dividido entre su desviación) siguen una normal  $N(0,1)$ .

Existen varias pruebas para contrastar la normalidad de los residuales como son la prueba de Kolmogorov-Smirnov, la prueba de Shapiro-Wilk, el contraste de Jarque-Bera, que mira si la distribución es normal o no usando la simetría y el apuntamiento, el test Chi-Cuadrado de Pearson o el test de Lillie, pero en este caso nos decantamos por la prueba de Kolmogorov-Smirnov ya que tiene las siguientes características:

- No hay pérdida de información. Todos los valores son incluidos en el desarrollo de la prueba.
- La prueba es exacta para cualquier tamaño de la muestra.

#### 3.2 Test para detectar sistematismos en las observaciones

Para detectar sistematismos se ha utilizado un estadístico compuesto por el valor medio de los residuos tipificados,  $\bar{w}_m$ , dividido entre su desviación típica,  $\sigma_{\bar{w}_m}$ . Definimos de esta manera el estadístico como:

$$Y = \frac{\bar{w}_m}{\sigma_{\bar{w}_m}}$$

donde  $m$  es el número de observaciones.

Este estadístico se asemeja a la t-Student:

$$Y \sim t_{m-1, \alpha}$$

donde  $\alpha$  es el nivel de significación.

La hipótesis se acepta si:

$$Y < t_{m-1,\alpha}$$

### 3.3 Test de detección de errores groseros

Por último en el caso de que el test anterior falle, es necesario revisar los residuales uno por uno para ver cuál de ellos está mal y eliminarlo. Para ello realizaremos el siguiente test a todos y cada uno de los residuales. Consideraremos el estadístico:

$$y = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}}$$

donde  $\hat{v}_i$  es el residual asociado a una observación y  $\sigma_{\hat{v}_i}$  su desviación.

Este estadístico se asemeja a una t-Student de un grado de libertad y nivel de significación  $\alpha$ :

$$y = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \sim t_{1,\alpha} = 6.3$$

Si  $y > t_{1,\alpha}$  entonces consideraremos que existe un error grosero que habrá que eliminar. De entre todos los valores a eliminar se eliminará solo el más grande volviendo a realizar el ajuste y recalculando los residuales de una forma iterativa, hasta que no existan errores groseros.

## 4 Aplicación al Radiotelescopio RAEGE

### 4.1 Toma de medidas

Las medidas para medir el punto invariante del radiotelescopio de 13 metros del Centro de Desarrollos Tecnológicos de Yebes se realizaron con dos metodologías diferentes a partir de las cuales se pudieron contrastar los resultados. Las medidas se realizaron con una estación total robotizada Leica TS30 de 0.5" y 0.6 mm de precisión angular y en distancia respectivamente.

#### 4.1.1 Metodología 1

El punto invariante en este caso se ha calculado situando la estación total en el pilar central que se encuentra en el interior del radiotelescopio, al que se han dado unas coordenadas fijas de (1000, 2000, 3000), sobre un trípode, sujeto con unas bridas a la chapa y lo suficientemente elevado para poder tener visibilidad a los pilares y hacer una inversa.



Figura 4.1. Estación TS30 montada en el trípode sobre el pilar situado en el interior de la cabina del radiotelescopio

Para realizar las medidas se apuntó a un reflector Corner cube “RRR Hexagon” con una precisión de construcción de 0.0001 mm que fue adosado magnéticamente en el interior de ambos contrapesos.

Se tomaron medidas del corner cube (retroreflector) cada 40 segundos en cada uno de los contrapesos moviendo la antena tanto en elevación como en azimut. La estación TS50 fue controlada por un laptop conectado a través de bluetooth y corriendo un programa realizado por el observatorio que gestionaba todas las tareas de orientación, puntería, medida, registro y sincronización con el centro de control de la antena. Las mediciones fueron tomadas en incrementos de 20° en azimut y elevación. El orden de las medidas se realizó, fijando un azimut de un total de 18 y moviendo el radiotelescopio a 5 elevaciones (7°,27°,47°,67°,87°). Una vez hechas las medidas se incrementa el azimut 20° y se repite el proceso pero comenzando en sentido descendente de elevación.

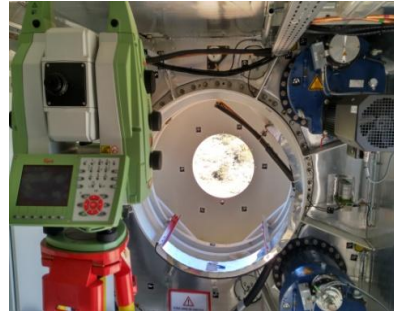
Se repitió la operación colocando el CCR en el contrapeso izquierdo. En total resultaron  $18 * 5 * 2 = 190$  observaciones que tomadas cada 40 segundos supusieron una duración de la observación automatizada de aproximadamente 2 horas.



Para cada contrapeso se han podido ajustar 5 círculos azimutales y 19 arcos de elevación. En total 10 círculos azimutales y 38 arcos de círculo en elevación a partir de los cuales se han calculado 19 ejes de elevación.

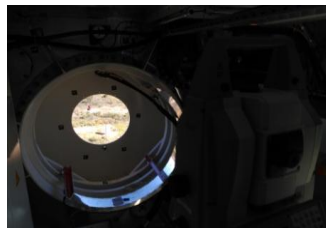


**Figura 4.2.** Reflector RRR adosado magnéticamente a la cara interna de uno de los contrapesos.



**Figura 4.3.** Estación Total Robotizada Leica TS-30

Para orientar la estación y conectarla con la red se han realizando observaciones desde el interior de la cabina al exterior usando los agujeros que quedan de quitar los contrapesos a todos los pilares exteriores, una vez acabada la observación de dentro.



**Figura 4.4.** Vista de los pilares desde el interior de la cabina

#### 4.1.2 Metodología 2

Para contrastar los resultados del método anterior se realizó la medida del punto invariante midiendo desde los pilares exteriores que rodean el radiotelescopio, V1, V2 y V3. El procedimiento fue similar al realizado desde el interior de la cabina, dando unas coordenadas locales (1000, 2000, 3000) al pilar desde el cual se realizan las medidas y moviendo la antena a las mismas posiciones. La diferencia principal fue el hecho de que para realizar las medidas se colocó un multi-prisma en cada contrapeso de la antena y para ciertas posiciones del radiotelescopio no eran visibles por lo que lo que no se pudieron medir círculos completos. Además esta metodología nos permitió comprobar la precisión que se puede alcanzar con dicho multi-prisma.



Figura 4.5. Multi-prima

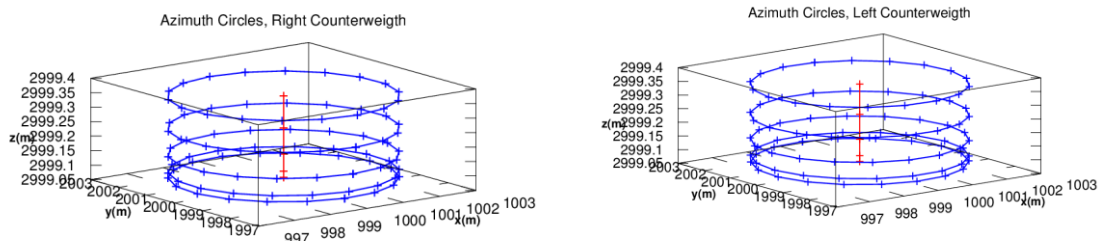
## 4.2 Resultados de las medidas

### 4.2.1 Resultados obtenidos a partir del método 1

Es importante señalar que todas las medidas mostradas y calculadas se encuentran referenciadas en un sistema de coordenadas local cuyo centro de coordenadas (1000,2000,3000) se encuentra situado en un tornillo que hay en el pilar central de la antena, en el interior de la cabina del radiotelescopio, donde se realizaron las medidas. Estas coordenadas es necesario transformarlas de ese sistema local, al sistema global de la red para conectar en el observatorio las distintas técnicas geodésicas.

#### Cálculo del Eje acimutal:

Para calcular el eje acimutal de la antena se han introducido en el ajuste las medidas de las 5 circunferencias acimutales para cada contrapeso, se han considerado un total de 10 circunferencias. Cada circunferencia es estimada a partir de 19 observaciones. En el ajuste se han estimado un total de 52 parámetros a partir de 380 ecuaciones de observación.



Figuras 4.5 y 4.7

Círculos acimutales generados por las medidas realizadas en el contrapeso derecho (figura de la izquierda) y en el contrapeso izquierdo (figura de la derecha). Las elevaciones de cada circunferencia son 7°, 27°, 47°, 67° y 87°. Para determinar cada circunferencia se han utilizado 19 observaciones.

Se exponen aquí los centros y radios ajustados de dichos círculos así como los parámetros del plano ajustado en cada círculo, cuyos  $AA$  y  $BB$  son comunes a todos los planos obtenidos en el ajuste global, puesto que todos los planos comparten el mismo vector normal:

Elevación (°)	Contrapeso derecho						
	Centro			Radio (m)	Parámetros del plano		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$		$AA(m)$	$BB(m)$	$CC(m)$
<b>7</b>	999.99572±0.00003	1999.98508±0.00003	2999.077061±0.000008	2.52783±0.00007	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>27</b>	999.99573±0.00003	1999.98509±0.00003	2999.098314±0.000008	2.53054±0.00007	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>57</b>	999.99569±0.00003	1999.98510±0.00003	2999.157699±0.000008	2.53723±0.00007	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>67</b>	999.99573±0.00003	1999.98505±0.00003	2999.247994±0.000007	2.54475±0.00005	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>87</b>	999.99573±0.00003	1999.98509±0.00003	2999.358389±0.000006	2.54953±0.00005	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003

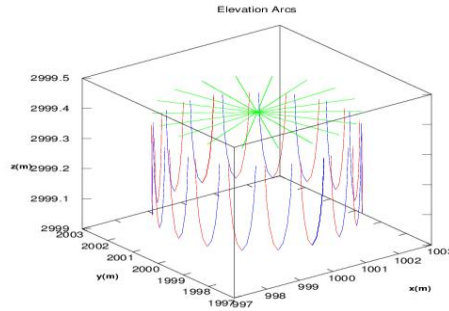
Elevación (°)	Contrapeso izquierdo						
	Centro			Radio (m)	Parámetros del plano		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$		$AA(m)$	$BB(m)$	$CC(m)$
<b>7</b>	999.99566±0.00003	1999.98511±0.00003	2999.075850±0.000008	2.53041±0.00006	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>27</b>	999.99569±0.00003	1999.98513±0.00003	2999.097503±0.000008	2.53319±0.00007	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>57</b>	999.99570±0.00003	1999.98511±0.00003	2999.157414±0.000008	2.53990±0.00007	-0.000082±0.000031	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>67</b>	999.99571±0.00003	1999.98510±0.00003	2999.248325±0.000007	2.54748±0.00005	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003
<b>87</b>	999.99567±0.00003	1999.98512±0.00003	2999.359246±0.000006	2.55231±0.00006	-0.000082±0.000001	0.000031±0.000001	2999.097±0.003

El eje de azimut o vector normal a todos los planos que contienen a todos y cada uno de los círculos y sus características vienen representadas en la siguiente tabla:

Vector director del Eje de azimut			Desviación estándar		
$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
-0.000082	0.000031	-1	0.000001	0.000001	0
Inclinación del Eje de azimut respecto de la normal (")			Desviación estándar (")		
-18.1			0.3		
Inclinación del Eje de azimut respecto del eje x (°)			Desviación estándar (°)		
339.1			0.8		

### Ejes de elevación

Para el cálculo de los ejes de elevación se han utilizado los centros de los arcos de círculo de ambos contrapesos para cada elevación. Cada centro de arco de círculo ha sido estimado a partir de 5 observaciones. En total se han considerado 19 arcos de círculo para cada contrapeso, esto es 38 en total, con los que se han generado 19 ejes de elevación.



**Figuras 4.8**

Arcos de círculo para distintos azimuts. En rojo se representan los arcos de círculo medidos en el contrapeso izquierdo y en azul los del contrapeso derecho, 38 en total. En verde están dibujados los ejes de elevación, 19 en total.

A continuación se exponen los centros de dichos arcos con sus desviaciones estándar para cada azimut y de cada contrapeso:

Azimut	Contrapeso derecho					
	Centro			Desviación estándar		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
0	999.74116	1997.4704	2999.41420	0.00009	0.0004	0.00006
20	998.89630	1997.70925	2999.41449	0.00008	0.00010	0.00006
40	998.1838	1998.2222	2999.41473	0.0002	0.0002	0.00019
60	997.69022	1998.94827	2999.41465	0.00018	0.00012	0.00010
80	997.47460	1999.79921	2999.41461	0.00008	0.00002	0.00002
100	997.5629	2000.6728	2999.4147	0.0005	0.0002	0.00016
120	997.94542	2001.46287	2999.41448	0.00016	0.00016	0.00012
140	998.57426	2002.07594	2999.41486	0.00011	0.00013	0.00009
160	999.3749	2002.4353	2999.41431	0.00009	0.0002	0.00009
180	1000.2505	2002.4999	2999.41448	0.00006	0.0002	0.00004
200	1001.09503	2002.26114	2999.41431	0.00007	0.00009	0.00005
220	1001.80768	2001.74816	2999.41430	0.00019	0.00018	0.00016
240	1002.30115	2001.02213	2999.4141	0.0002	0.00016	0.00014
260	1002.51671	2000.17100	2999.41417	0.00013	0.00003	0.00003
280	1002.42817	1999.29743	2999.4142	0.0003	0.00013	0.00009
300	1002.04624	1998.50673	2999.41445	0.00011	0.00010	0.00008
320	1001.41734	1997.89461	2999.41399	0.00015	0.00018	0.00013
340	1000.61630	1997.5344	2999.4145	0.0002	0.0005	0.00019
360	999.74099	1997.4704	2999.41422	0.00012	0.0005	0.00009

Azimut	Contrapeso izquierdo					
	Centro			Desviación estándar		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
0	1000.25079	2002.5029	2999.41457	0.00008	0.0003	0.00007
20	1001.0966	2002.26325	2999.41419	0.0001	0.00014	0.00009
40	1001.8095	2001.74968	2999.41431	0.0001	0.00011	0.00010
60	1002.3037	2001.0229	2999.41433	0.0003	0.0002	0.00016
80	1002.5189	2000.1710	2999.41439	0.0001	0.0002	0.00016
100	1002.43052	1999.29668	2999.4142	0.0002	0.00012	0.0001
120	1002.04849	1998.50523	2999.41427	0.00005	0.00005	0.00004
140	1001.41823	1997.89245	2999.41406	0.00018	0.00018	0.00013
160	1000.61699	1997.5319	2999.41437	0.00019	0.0005	0.00013
180	999.74056	1997.4677	2999.41449	0.00008	0.0003	0.00007
200	998.8947	1997.70629	2999.41456	0.0001	0.00014	0.00008
220	998.18189	1998.22049	2999.41457	0.00013	0.00014	0.00011
240	997.6875	1998.94708	2999.41475	0.0002	0.00015	0.00011
260	997.4724	1999.79908	2999.41490	0.0009	0.00019	0.00015
280	997.5606	2000.6737	2999.41459	0.0004	0.0002	0.00018
300	997.9430	2001.4650	2999.4147	0.0003	0.0003	0.0002
320	998.57258	2002.07795	2999.41481	0.00008	0.00009	0.00006
340	999.37419	2002.4383	2999.4149	0.00015	0.0004	0.0001

### Parámetros de los ejes del radiotelescopio

En la siguiente tabla se resumen todos los parámetros que definen la geometría de los ejes del radiotelescopio:

Parámetros de la geometría de los ejes del radiotelescopio RAEGE						
	Valor			Desviación estándar		
Punto invariante (x,y,z) (m)	999.99572	1999.985079	2999.077061	0.00003	0.000009	0.000009
Excentricidad (m)	0.0015			0.0008		
Inclinación eje azimut respecto de la normal (")	-18.1			0.3		
Azimut del eje de azimut respecto x (°)	339.1			0.8		
Ángulo de no ortogonalidad (")	-0.6			18		

#### 4.2.1.1 Comparación de los resultados con la última medición

Al comparar estos resultados con los realizados en la última medición de la antena de 13 metros del interior de la cabina hemos observado que ha aumentado la inclinación del eje de azimut respecto de la normal de 8.3" a 18.14". Esto podría estar debido a que durante el último año se recubrió la parábola con un "cladding" que permitirá recibir a más frecuencias, y cuyo peso haya inclinado el eje de azimut del radio telescopio.

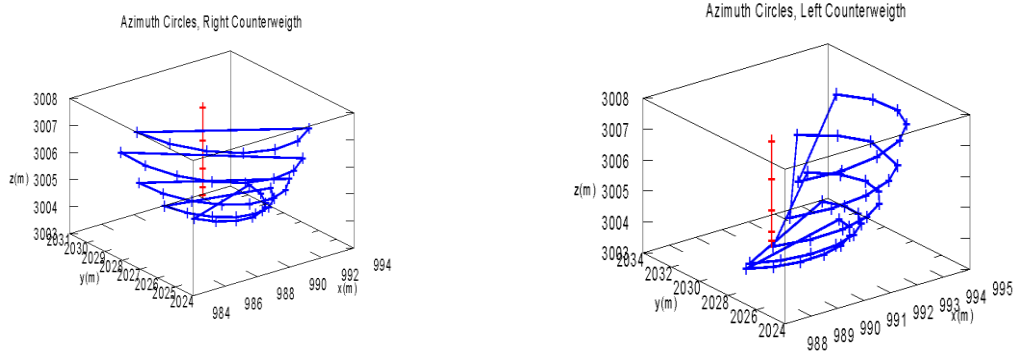
4.2.2 Resultados obtenidos a partir del método 2

En este caso, como ya hemos señalado con anterioridad, las medidas se han realizado desde los pilares exteriores, V1, V2 y V3 en un sistema de coordenadas local cuyo centro de coordenadas fijo, (1000,2000,3000), se encuentra situado en el tornillo de centrado que hay en cada pilar. Desde cada pilar tendremos medidas en un sistema de referencia local diferente y para una posterior comparación de los resultados será necesario hacer una transformación al sistema global desde cada pilar.

El procedimiento para calcular el eje de azimut y los ejes de elevación es igual al realizado desde el interior del radiotelescopio, salvo que las medidas son realizadas desde el exterior y por tanto el número de arcos y círculos medidos variará en función de las posibilidades de visión desde dicho pilar.

**Cálculo del Eje azimutal:**

En resumen, para calcular el eje azimutal de la antena en este caso se han introducido en el ajuste las medidas de las 5 arcos de circunferencias azimutales para cada contrapeso, considerando un total de 10 arcos de circunferencia para las medidas desde cada pilar. Un ejemplo gráfico de los arcos medidos lo encontramos a continuación:



**Figuras 4.9 y 4.10**

Arcos azimutales generados por las medidas realizadas desde un pilar exterior en el contrapeso derecho (figura de la izquierda) y en el contrapeso izquierdo (figura de la derecha). Las elevaciones de cada circunferencia son 7º, 27º, 47º, 67º y 87º.

El eje de azimut o vector normal a todos los planos que contienen a todos y cada uno de los círculos y sus características desde cada uno de los pilares vienen representadas en las siguientes tablas:

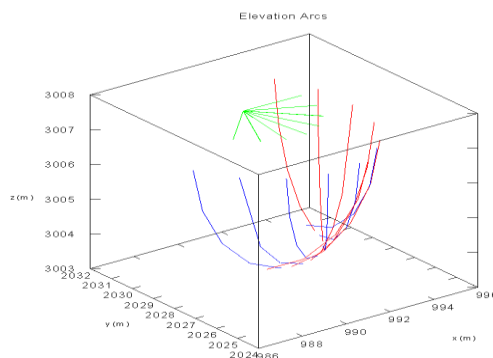
DESDE V1					
Vector director del Eje de azimut			Desviación estándar		
$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
0.000009	-0.000145	-1	0.000021	0.000024	0
Inclinación del Eje de azimut respecto de la normal (")			Desviación estándar (")		
-29			4		
Inclinación del Eje de azimut respecto del eje x (º)			Desviación estándar (º)		
273			8		

DESDE V2					
Vector director del Eje de azimuth			Desviación estándar		
$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
0.00004	0.000007	-1	0.00003	0.000041	0
Inclinación del Eje de azimuth respecto de la normal (")			Desviación estándar (")		
-7			5		
Inclinación del Eje de azimuth respecto del eje x (°)			Desviación estándar (°)		
10			60		

DESDE V3					
Vector director del Eje de azimuth			Desviación estándar		
$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
0.000006	0.000138	-1	0.000016	0.000016	0
Inclinación del Eje de azimuth respecto de la normal (")			Desviación estándar (")		
-28			3		
Inclinación del Eje de azimuth respecto del eje x (°)			Desviación estándar (°)		
87			6		

### Ejes de elevación

Para el cálculo de los ejes de elevación se han utilizado los centros de los arcos de círculo de para un determinado azimuth fijo y el vector normal al plano ajustado en el cual está contenida la circunferencia. Gráficamente podemos ver los ejes de elevación ajustados desde uno de los pilares:



**Figuras 4.11**

Arcos de círculo para distintos azimuths. En rojo se representan los arcos de círculo medidos en el contrapeso izquierdo y en azul los del contrapeso derecho.

Los arcos utilizados para la estimación de los parámetros han sido:

	Número de Arcos del Contrapeso Derecho	Número de Arcos del Contrapeso Izquierdo
Desde V1	7	8
Desde V2	9	6
Desde V3	6	6

A continuación se muestra un resumen de los parámetros estimados del radiotelescopio a partir de las medidas realizadas desde los pilares exteriores:

Parámetros de la geometría de los ejes del radiotelescopio RAEGE estimados desde V1						
	Valor			Desviación estándar		
Punto invariante (x,y,z) (m)	1016.9103	2024.44666	3009.1247	0.0006	0.00012	0.0005
Excentricidad (m)	0.0021			0.0009		
Inclinación eje azimut respecto de la normal (")	-29			5		
Azimut del eje de azimut respecto x (º)	273			8		
Ángulo de no ortogonalidad (")	-24			17		

Parámetros de la geometría de los ejes del radiotelescopio RAEGE estimados desde V2						
	Valor			Desviación estándar		
Punto invariante (x,y,z) (m)	991.7958	1970.43309	3008.1757	0.0007	0.00017	0.0006
Excentricidad (m)	0.0019			0.0011		
Inclinación eje azimut respecto de la normal (")	-7			5		
Azimut del eje de azimut respecto x (º)	10			60		
Ángulo de no ortogonalidad (")	90			25		

Parámetros de la geometría de los ejes del radiotelescopio RAEGE estimados desde V3						
	Valor			Desviación estándar		
Punto invariante (x,y,z) (m)	990.2755	2029.17832	3007.5961	0.0006	0.00013	0.0007
Excentricidad (m)	0.0014			0.0014		
Inclinación eje azimut respecto de la normal (")	-28			3		
Azimut del eje de azimut respecto x (º)	87			6		
Ángulo de no ortogonalidad (")	-39			12		



Esta metodología ha permitido además obtener una estimación de la precisión que se puede obtener colocando multi-prismas en los contrapesos del radiotelescopio.

4.2.3 Transformación a sistemas globales y comparación de resultados entre los dos métodos.

Para poder comparar los resultados es necesario transformar todos los datos al sistema global, para lo cual se ha realizado una transformación Helmert de 7 parámetros. Para hacer la transformación son necesarios al menos cuatro puntos con sus coordenadas en sus correspondientes sistemas local y global, y una vez estimados los parámetros de la transformación podemos transformar cualquier punto en ese sistema. Los puntos invariantes en el sistema global, obtenidos a partir de la transformación Helmert y teniendo en cuenta la precisión desde los pilares desde los que se radian son:

	Punto invariante		
	x	y	z
<b>Dentro de la cabina</b>	4848831.4577± 0.0005	-261629.9515± 0.0005	4122976.2152± 0.0007
<b>Desde V1</b>	4848831.4574± 0.0006	-261629.9502± 0.0005	4122976.2151± 0.0005
<b>Desde V2</b>	4848831.4583± 0.0006	-261629.9509± 0.0004	4122976.2159± 0.0005
<b>Desde V3</b>	4848831.4576± 0.0006	-261629.9517± 0.0004	4122976.2157± 0.0005

Si se realiza una media del punto invariante desde los tres pilares medidos y se comparan el resultado con el obtenido a partir de las mediciones de dentro de la cabina:

	Punto invariante		
	x	y	z
<b>Dentro de la cabina</b>	4848831.4577± 0.0005	-261629.9515± 0.0005	4122976.2152± 0.0007
<b>MediaV1V2V3</b>	4848831.4577±0.0005	-261929.9510±0.0008	4122976.2156±0.0004
<b>Diferencia interior- exterior de la cabina</b>	0.00004	0.0005	0.0004

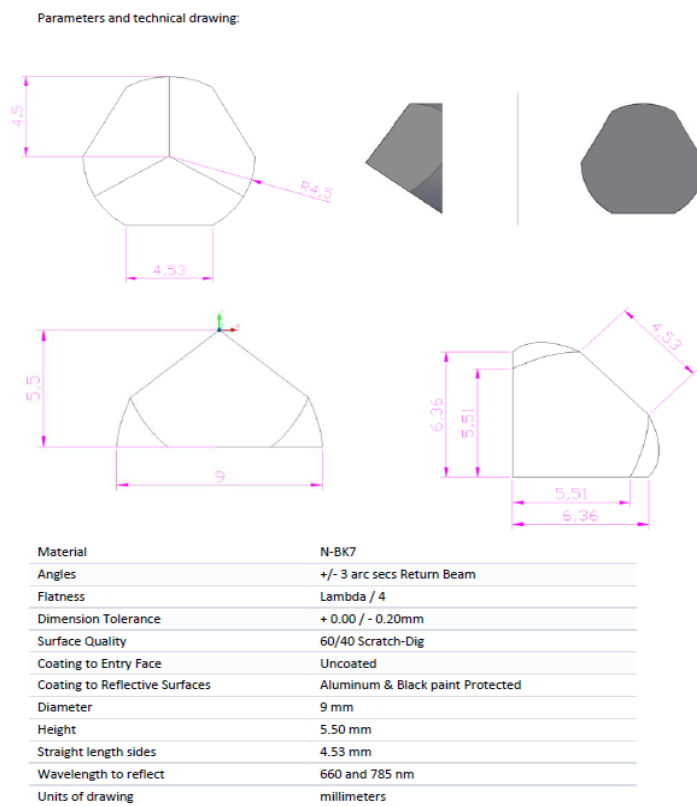
Podemos observar que las diferencias entre ambos resultados son muy pequeñas validando por tanto la medición del punto invariante.

### 4.3 Estudio de la precisión del multi-prisma a partir de las medidas desde los pilares a la antena de 13 metros.

Como ya se ha comentado con anterioridad, la medición del punto invariante de la antena de 13 metros desde los pilares exteriores sirvió para especificar la precisión que se puede llegar a alcanzar utilizando los multi-prismas colocados en los contrapesos del radiotelescopio.

Cada multi-prisma está formado por 4 prismas pequeños pegados, que hacen que reflejen la señal independientemente del ángulo con el que se miren.

El diseño fue el siguiente:



**Figuras 4.11**  
Parámetros del diseño del multi-prisma.

Para estudiar la precisión se ha realizado un estudio de los residuales de los datos ajustados a los círculos desde los distintos pilares. En las siguientes tablas se muestra la precisión relativa a los residuales del ajuste mínimos cuadrados de los arcos y los círculos para ver la precisión con la que podemos medir usando el multi-prisma:

## Cálculo del punto invariante de la antena RAEGE

ESTUDIO DE LA PRECISIÓN DEL MULTIPRISMA DESDE V1									
Residual medio de cada arco	Contrapeso Derecho								
	Arco Az.40º	Arco Az.60º	Arco Az.80º	Arco Az.100º	Arco Az. 120º	Arco az.140º	Arco 160º		
	0.000465±0.000320	0.000411±0.000178	0.000280±0.000153	0.000269±0.000148	0.001037±0.000533	0.000574±0.000164	0.000096±0.000053		
	Contrapeso Izquierdo								
	Arco Az. 0º	Arco Az.20º	Arco Az. 260º	Arco Az. 280º	Arco Az.300º	Arco Az.320º	Arco Az. 340º	Arco Az. 360º	
	0.000226±0.000136	0.000367±0.000100	0.000269±0.000160	0.000198±0.000163	0.000370±0.000228	0.000290±0.000083	0.000313±0.000132	0.000213±0.000124	
Res. medio de todos los arcos	0.000358±0.000221								
Res. máximo de todos los arcos	0.001634								
Residual medio de cada círculo horizontal	Contrapeso Derecho								
	Círculo EL. 7º		Círculo EL. 27º		Círculo EL. 47º		Círculo EL. 67º		Círculo EL. 87º
	0.000440±0.000310		0.000721±0.000482		0.000285±0.000166		0.000637±0.000428		0.000377±0.000268
	Contrapeso Izquierdo								
	Círculo EL. 7º		Círculo EL. 27º		Círculo EL. 47º		Círculo EL. 67º		Círculo EL. 87º
	0.000467±0.000181		0.000506±0.000221		0.000399±0.000268		0.000700±0.000468		0.000749±0.000369
Res. Medio de todos los círculos horizontales	0.000528±0.000163								
Res. máximo de todos los círculos	0.000749								

ESTUDIO DE LA PRECISIÓN DEL MULTIPRISMA DESDE V2										
Residual medio de cada arco	Contrapeso Derecho									
	Arco Az. 0º	Arco Az.20º	Arco Az. 40º	Arco Az. 260º	Arco Az. 280º	Arco Az.300º	Arco Az.320º	Arco Az. 340º	Arco Az. 360º	
	0.000123±0.000083	0.000291±0.000164	0.000238±0.000134	0.000891±0.000611	0.000438±0.000271	0.000478±0.000229	0.000278±0.000136	0.000241±0.000114	0.000751±0.000644	
	Contrapeso Izquierdo									
	Arco Az. 120º		Arco az.140º		Arco 160º		Arco Az. 180º		Arco 200º	
	0.000318±0.000208		0.000135±0.000044		0.000408±0.000279		0.000481±0.000329		0.000244±0.000098	
Res. medio de todos los arcos	0.000372±0.000214									
Res. máx. de todos los arcos	0.001926									
Res. medio de cada círculo horizontal	Contrapeso Derecho									
	Círculo EL. 7º		Círculo EL. 27º			Círculo EL. 47º		Círculo EL. 67º		Círculo EL. 87º
	0.000551±0.000397		0.000689±0.000481			0.000749±0.000436		0.000607±0.000271		0.000355±0.000248
	Contrapeso Izquierdo									
	Círculo EL. 7º		Círculo EL. 27º			Círculo EL. 47º		Círculo EL. 67º		Círculo EL. 87º
	0.000359±0.000166		0.000692±0.000515			0.000399±0.000165		0.000712±0.000182		0.000531±0.000288
Res. Medio de todos los círculos	0.000564±0.000151									
Res. máx. de todos los círculos	0.000749									

ESTUDIO DE LA PRECISIÓN DEL MULTIPRISMA DESDE V3						
Residual medio de cada arco	Contrapeso Derecho					
	Arco 160º	Arco Az. 180º	Arco az.200º	Arco Az. 20º	Arco Az. 260º	Arco Az. 280º
	0.000497±0.000269	0.000305±0.000173	0.000219±0.000056	0.000149±0.000082	0.000714±0.000304	0.000547±0.000240
	Contrapeso Izquierdo					
	Arco Az. 0º	Arco Az.20º	Arco Az. 60º	Arco Az.80º	Arco Az.120º	
	0.000141±0.000094	0.000176±0.000089	0.000393±0.000204	0.000312±0.000198	0.000255±0.000173	
Residual medio de todos los arcos	0.000351±0.000182					
Residual máximo de todos los arcos	0.001016					
Residual medio de cada círculo horizontal	Contrapeso Derecho					
	Círculo EL. 7º		Círculo EL. 27º		Círculo EL. 47º	
	0.000745±0.000725		0.000597±0.000470		0.000730±0.000366	
	Contrapeso Izquierdo					
	Círculo EL. 7º		Círculo EL. 27º		Círculo EL. 47º	
	0.000850±0.000456		0.000533±0.000431		0.000569±0.000310	
Residual Medio de todos los círculos horizontales	0.000688±0.000224					
Residual máximo de todos los círculos	0.001137					

Se puede apreciar en los resultados que en la mayoría de los casos los residuales están por debajo del milímetro.

## **5 Conclusiones**

Existen diversas metodologías para determinar el punto invariante de un radiotelescopio. Aquí se ha descrito la más clásica de todas ellas que es el ajuste por círculos y se ha aplicado al radiotelescopio RAEGE del Observatorio de Yebes realizando mediciones desde el interior y el exterior del radio telescopio. Las coordenadas han sido calculadas en un sistema de referencia local centrado en la base del pilar central desde donde se han realizado las mediciones. La precisión que se ha alcanzado está por debajo del milímetro por lo que está dentro de los márgenes requeridos para, poder relacionar las diversas técnicas geodésicas disponibles en el Observatorio a partir del local tie.

## 6 Referencias

- Sevilla, M.J., 1986. "Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes geodésicas", III Curso de Geodesia superior, 2, 2-69.
- Sevilla, M.J., 1987. "Colocación Mínimos Cuadrados", IV Curso de Geodesia Superior, 2, 97-141.
- Sevilla, M.J., 2003. "Ajuste con Constreñimientos", Seminario de geodesia Superior.
- Santamaría-Gómez, A., García-Espada, S., 2011. "Simulating the estimation of the 40m radio-telescope Invariant Reference Point at the Yebes observatory". Informe Técnico IT-OAN 2011-9.
- Dawson, J., Sardi, P., Johnston, G.M., Vittuari, L., 2007. "Indirect approach to invariant point determination for SLR and VLBI systems: an assessment", J. Geody. 81, 433-441.
- Fancher, K., Smith, D., Breidenbach, S., Olsen, J., Paudel, N., 2010. "Recent IERS Site Survey of Multiple Co-located Geodetic Techniques by NGS", FIG Congress 2010, Facing the challenges- Building the Capacity.
- Starti, P., Sillard, P., Vittuari, L., 2004 "Surveying co-located space-geodetic instrument for ITRF computation", Journal of Geodesy, 78, 210-222.