

**CÁLCULO DEL PUNTO INVARIANTE DE UNA ANTENA.
MÉTODO DE AJUSTE CLÁSICO POR CÍRCULOS. APLICACIÓN
AL RADIOTELESCOPIO RAEGE DEL OBSERVATORIO DE
YEBES**

Beatriz Córdoba Hita, Javier López Ramasco

INFORME TÉCNICO IT - CDT 2015 - 2



Los desarrollos descritos en este informe técnico han sido cofinanciados por el Programa Operativo Fondo Tecnológico FEDER de la UE bajo el convenio IGN-MINECO denominado “Radiotelescopio de VLBI geodésico y astrométrico para su integración en la red VGOS (VGOSYEBES)”

Contenidos

Contenidos.....	I
1. Introducción.....	1
2. Descripción del Método.....	2
2.1. Ajuste del eje de azimut.....	2
2.2. Cálculo de los ejes de elevación	8
2.3. Proyección sobre el eje de azimut.....	9
2.4. Cálculo de los parámetros de los ejes del radiotelescopio.....	10
2.4.1. Cálculo del punto invariante.....	10
2.4.2. Cálculo de la excentricidad.....	10
2.4.3. Cálculo de la inclinación del eje de azimut	11
2.4.4. Cálculo del ángulo de no ortogonalidad	12
3. Aplicación al Radiotelescopio RAEGE.....	13
3.1. Toma de medidas	13
3.2. Resultados de las medidas	15
Conclusiones.....	20
4. Referencias	21

1. Introducción

La posición del punto de referencia invariante es muy importante para la determinación del local tie que conecta todas las técnicas geodésicas en un observatorio. Se define como la intersección entre el eje de azimut y el de elevación de un radiotelescopio y en el caso de que no intersequen, es la proyección del eje de elevación sobre el eje de azimut. Normalmente este punto es inaccesible o no está materializado. Existen diversos métodos para realizar su cálculo. El más clásico de estos métodos, que vamos a utilizar para calcular el punto invariante del radiotelescopio de 13 metros, construido recientemente en el Observatorio, es el ajuste de puntos medidos sobre la estructura del radiotelescopio bajo ciertas condiciones o constreñimientos a unos círculos 3D. En este modelo el radiotelescopio es rotado alrededor de uno de sus ejes dejando el otro fijo, de manera que la trayectoria de cada marcador corresponde a un círculo. Este proceso se repite para distintas orientaciones del radiotelescopio y para ambos ejes.

2. Descripción del Método

El método para calcular el punto invariante consta de cuatro pasos:

1- Determinar el eje de azimut a partir de medidas que se ajustan a círculos horizontales. Para conseguir cada círculo se han de medir las coordenadas tridimensionales del marcador moviendo la antena en azimut. Cada círculo corresponde a una elevación distinta. Se utiliza un marcador que se adosa magnéticamente en la cara interna de cada uno de los dos contrapesos dentro de la cabina de azimut.

2- Determinar los ejes de elevación. Para ello lo que se hace es fijado un azimut mover el radiotelescopio a distintas elevaciones. Para cada azimut quedan definidos dos arcos de círculos verticales ya que se miden ambos contrapesos. Con los centros de los arcos se genera el eje de elevación.

3- Proyectar los ejes de elevación sobre el eje de azimut calculado en el primer paso.

4- Cálculo de los parámetros de la antena: coordenadas del punto invariante, excentricidad, inclinación del eje de azimut sobre la normal y ángulo de falta de ortogonalidad entre los diferentes ejes de elevación y el de azimut.

2.1. Ajuste del eje de azimut

El objetivo es, dado un conjunto de coordenadas en tres dimensiones ajustar dichos puntos a diversos círculos que son paralelos unos a otros y por tanto todos ellos han de compartir el mismo vector normal. Una circunferencia en el espacio viene dada por la intersección de un plano con una esfera. Por este motivo hemos de ajustar los datos simultáneamente tanto a la ecuación de una esfera como a la ecuación de un plano a través de un Ajuste Mixto con constreñimientos. Esto implica que para cada circunferencia se han de ajustar 7 parámetros, tres que son las coordenadas del centro de la esfera, el radio que se puede deducir a partir de las anteriores, y tres parámetros que definen la ecuación de un plano. Además se debe imponer el constreñimiento de que el centro de la circunferencia ha de pertenecer al plano. Si tenemos m círculos el número total de parámetros que tendremos que estimar será $5 * m + 2$. El vector normal es el que mejor se ajuste a la vez a todos los planos.

AJUSTE MIXTO

Consideremos las dos ecuaciones que queremos ajustar para cada círculo:

- La ecuación de la esfera:

$$F(L, X) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

donde (a, b, c) es el centro de la circunferencia y r es el radio.

- La ecuación del plano que dependiendo de la componente del vector normal que queramos fijar se puede escribir de tres maneras distintas:

- Si fijamos la componente z :

$$G(L, X) = AA * x + BB * y + CC - z = 0$$

donde el vector normal del plano viene dado por $(AA, BB, -1)$.

- Si fijamos la componente x :

$$G(L, X) = -x + AA + BB * y + CC * z = 0$$

donde el vector normal del plano viene dado por $(-1, BB, CC)$.

- Si fijamos la componente y :

$$G(L, X) = AA * x + BB - y + CC * z = 0$$

donde el vector normal del plano viene dado por $(AA, -1, CC)$.

De manera que nuestro modelo funcional es de la forma:

$$FF(X, L) = 0$$

donde $FF(X, L) = \begin{pmatrix} F(L, X) \\ G(L, X) \end{pmatrix}$, X es el vector de parámetros ajustados y L es el vector de valores ajustados de las observaciones.

Para estimar los parámetros (a, b, c) , r , AA , BB , CC , para cada círculo se han de ajustar las observaciones a través del Ajuste Mixto de Mínimos Cuadrados, esto es, tenemos que llegar a un sistema de la forma:

$$Ax + Bv = t$$

donde

Ax representa las ecuaciones de observación, a partir de las cuales se van a estimar los parámetros, esto es (a, b, c) , r , AA , BB , CC , que vienen dados en el vector x .

Bv representa las ecuaciones de condición y sirve para estimar, ajustar las observaciones que vienen dadas por vector v .

t es el vector de términos independientes.

Linealización del modelo:

Debido a que nuestro modelo $FF(X, L) = 0$ no es lineal, en primer lugar debemos linealizarlo. El método de linealización por la fórmula de Taylor aplicada a la función de dos variables nos conduce a la siguiente expresión:

$$FF(X_0, L_0) + \left. \frac{\partial FF}{\partial X} \right|_{X_0, L_0} (X - X_0) + \left. \frac{\partial FF}{\partial L} \right|_{X_0, L_0} (L - L_0) = 0$$

donde

X es el vector de parámetros ajustados.

X_0 es el vector de valores aproximados de los parámetros X en torno al cual se hace el desarrollo de Taylor.

L es el vector de valores ajustados de las observaciones.

L_0 es el vector de valores aproximados de las observaciones.

Si llamamos $\left. \frac{\partial FF}{\partial X} \right|_{X_0, L_0} = A$ y $\left. \frac{\partial FF}{\partial L} \right|_{X_0, L_0} = B$, y $x = X - X_0$ entonces obtenemos que:

$$F(X_0, L_0) + Ax + B(L - L_0) = 0$$

Si llamamos l al vector de observaciones reales y $v = L - l$ al vector de errores residuales, llegamos a:

$$F(X_0, L_0) + Ax + B(l + v - L_0) = 0$$

entonces:

$$Ax + Bv = -F(X_0, L_0) - Bl + BL_0$$

Si tomamos L_0 como las propias observaciones entonces obtenemos:

$$Ax + Bv = -F(X_0, L_0)$$

Y llamando $t = -F(X_0, L_0)$, llegamos al sistema de la forma:

$$Ax + Bv = t$$

Cálculo de la Matriz A:

La matriz A se obtiene calculando las parciales respecto de los parámetros tanto de la ecuación de la esfera como de la ecuación del plano.

- Ecuación de la Esfera: $\left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_0, L_0}$

$$F(L, X) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2(x - a); \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -2(y - b); \quad \frac{\partial F}{\partial c} = -2(z - c); \quad \frac{\partial F}{\partial r} = -2r;$$

- Ecuación del plano: $\frac{\partial G}{\partial X} \Big|_{X_0, L_0}$

- Si fijamos la componente z : $G(L, X) = AA * x + BB * y + CC - z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial AA} = x; \quad \frac{\partial G}{\partial BB} = y; \quad \frac{\partial G}{\partial CC} = 1$$

- Si fijamos la componente x : $G(L, X) = -x + AA + BB * y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial AA} = 1; \quad \frac{\partial G}{\partial BB} = y; \quad \frac{\partial G}{\partial CC} = z$$

- Si fijamos la componente y : $G(L, X) = AA * x + BB - y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial AA} = x; \quad \frac{\partial G}{\partial BB} = 1; \quad \frac{\partial G}{\partial CC} = z$$

Por lo tanto si n es el número total de observaciones, m es el número de círculos y $p = 5 * m + 2$ el número total de parámetros la matriz A de dimensión $2n \times p$ vendrá dada por (escribimos la matriz sólo en el caso en el que para calcular el plano se fije la componente z):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial c} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial G}{\partial AA} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial BB} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial CC} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial G}{\partial AA} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial BB} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial CC} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial G}{\partial AA} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial BB} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & \frac{\partial G}{\partial CC} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial G}{\partial AA} \Big|_{x_0, l_0} & \frac{\partial G}{\partial BB} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & \frac{\partial G}{\partial CC} \Big|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Y el vector de parámetros x de dimensión p será:

$$x = (a_1 - a_0 \quad b_1 - b_0 \quad c_1 - c_0 \quad r_1 - r_0 \quad a_1 - a_0 \quad b_2 - b_0 \quad c_2 - c_0 \quad r_2 - r_0 \quad \dots \quad r_n - r_0 \quad AA \quad BB \quad CC_1 \quad \dots \quad CC_m)^T$$

Cálculo de la Matriz B

Para ello tenemos que calcular las parciales respecto de las observaciones tanto de la esfera como del plano:

- Ecuación de la esfera: $\frac{\partial F}{\partial L}\Big|_{X_0, L_0}$

$$F(L, X) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

Las derivadas parciales respecto de las observaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - a); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - b); \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - c);$$

- Ecuación del plano: $\frac{\partial G}{\partial L}\Big|_{X_0, L_0}$

• Si fijamos la componente z : $G(L, X) = AA * x + BB * y + CC - z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = AA; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = BB; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -1$$

• Si fijamos la componente x : $G(L, X) = -x + AA + BB * y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = BB; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = CC$$

• Si fijamos la componente y : $G(L, X) = AA * x + BB - y + CC * z = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = AA; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = CC$$

Por lo tanto la matriz B de dimensión $2n \times 3n$ viene dada por:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0, L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0, L_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0, L_0} \\ \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{x_0, L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{x_0, L_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{x_0, L_0} & \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{x_0, L_0} \end{pmatrix}$$

Y el vector v de residuales de dimensión $3n$ viene dado por:

$$v = (v_{1x} \ v_{1y} \ v_{1z} \ v_{2x} \ v_{2y} \ v_{2z} \ \dots \ v_{nx} \ v_{ny} \ v_{nz})^T$$

El vector t vendrá dado por:

$$t = -FF(X_0, L_0)$$

Soluciones:

La solución mínimos cuadrados de un ajuste mixto viene dado por:

$$\hat{x} = (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} t \quad \text{donde } M^{-1} = B P^{-1} B^T$$

$$\hat{v} = P^{-1} B^T M^{-1} (t - A \hat{x})$$

CONSTREÑIMIENTOS

Ahora bien, la solución que nos da del centro de la esfera no es única, porque hay muchos centros posibles en el espacio que cumplan la ecuación de la esfera por estar todos a la misma distancia. Por este motivo es necesario añadir un constreñimiento a nuestras ecuaciones. El constreñimiento va a ser que el centro de la esfera debe pertenecer al plano estimado:

- Fijando la componente z :

$$H = AA \cdot a + BB \cdot b + CC - c = 0$$

- Fijando la componente x :

$$H = AA * a + BB * b + CC - c = 0$$

- Fijando la componente y :

$$H = AA * a + BB - b + CC * c = 0$$

Para cada centro tendremos una ecuación por tanto en total tendremos m ecuaciones que se corresponde con el número de círculos que tenemos.

Por tanto a nuestro ajuste mixto de la forma:

$$Ax + Bv = t$$

tenemos que añadir el constreñimiento

$$Hx = H_0$$

Linealización de los constreñimientos:

Debido a que H no es una función lineal es necesario linealizarla respecto de los parámetros. (Aquí expondremos sólo los resultados en el caso en el que se fija el eje z):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = AA; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = BB; \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -1; \quad \frac{\partial H}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial AA} = a; \quad \frac{\partial H}{\partial BB} = b; \quad \frac{\partial H}{\partial CC} = 1$$

Cálculo de la Matriz H :

Por lo tanto la matriz H de dimensión $m \times p$ viene dada por (escribimos la matriz sólo en el caso en el que para calcular el plano se fije la componente z):

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial a}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial b}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial c}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial r}|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial AA}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial BB}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial CC}|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial a}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial b}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial c}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial r}|_{x_0, l_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial AA}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial BB}|_{x_0, l_0} & 0 & \frac{\partial H}{\partial BB}|_{x_0, l_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial a}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial b}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial c}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial r}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial AA}|_{x_0, l_0} & \frac{\partial H}{\partial BB}|_{x_0, l_0} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial H}{\partial BB}|_{x_0, l_0} \end{pmatrix}$$

Y el vector x es el mismo vector de parámetros que describimos anteriormente.

El vector H_0 viene dado por:

$$H_0 = H(X_0, L_0)$$

Soluciones:

La formulación correspondiente al ajuste mixto con constreñimientos en los parámetros viene dada por:

$$\begin{aligned} M &= BP^{-1}B^T \\ N &= A^T M^{-1}A \\ \hat{x}_c &= \hat{x} + \Delta\hat{x} \end{aligned}$$

Donde \hat{x} es la solución del ajuste mixto realizado con anterioridad y $\Delta\hat{x}$ es la corrección a esa solución para que se cumpla el constreñimiento:

$$\hat{x} = N^{-1}A^T M^{-1}t$$

$$\Delta\hat{x} = N^{-1}H^T(HN^{-1}H^T)^{-1}(H_0 - H\hat{x})$$

Los residuales a las observaciones vienen dadas por:

$$\hat{v} = P^{-1}B^T M^{-1}(t - A\hat{x}_c)$$

La estimación de la varianza a priori de la unidad de peso es:

$$\sigma_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{cc + ss - nn}$$

donde $cc = Rango(B)$, $nn = Rango(A)$ y $ss = Rango(H)$.

La matriz cofactor a posteriori de los parámetros es:

$$Q_{xx} = N^{-1} - N^{-1}H^T(HN^{-1}H^T)^{-1}HN^{-1}$$

2.2. Cálculo de los ejes de elevación

Para calcular los ejes de elevación lo que se hace es fijado un azimut mover la antena en distintas elevaciones. Para cada elevación queda definido un arco de círculo. Como se utilizan dos marcadores, con los centros de los arcos descritos por los dos marcadores para el mismo azimut se genera el eje de elevación. Para calcular los centros

de los arcos se realiza el mismo Ajuste Mixto que en el apartado anterior pero para un solo círculo.

2.3. Proyección sobre el eje de azimut

Una vez conocido el eje de azimut (vector director y punto), para calcular el punto invariante lo que se hace es, calculados los ejes de elevación (definidos por un vector director y un punto), la proyección ortogonal de cada uno de los ejes de elevación sobre el eje de azimut. Esto se realiza calculando la perpendicular común a ambas rectas. Para ello vamos a llamar $P = (P_1, P_2, P_3)$ a un punto del eje de azimut y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a su vector director. Las ecuaciones paramétricas de esta recta serán:

$$\begin{cases} x = P_1 + \lambda u_1 \\ y = P_2 + \lambda u_2 \\ z = P_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$

Un punto genérico de esta recta es por tanto $(P_1 + \lambda u_1, P_2 + \lambda u_2, P_3 + \lambda u_3)$.

Cada eje de elevación queda definido con un punto $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = Q_1 + \mu v_1 \\ y = Q_2 + \mu v_2 \\ z = Q_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Y por lo tanto un punto genérico del eje de elevación será:

$$(Q_1 + \mu v_1, Q_2 + \mu v_2, Q_3 + \mu v_3)$$

El vector que une los dos puntos P y Q tiene que ser ortogonal tanto al vector director del eje de azimut como al vector director del eje de elevación, por lo tanto sus respectivos productos escalares han de ser cero.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (Q_1 + \mu v_1 - P_1 - \lambda u_1, Q_2 + \mu v_2 - P_2 - \lambda u_2, Q_3 + \mu v_3 - P_3 - \lambda u_3)$$

Como $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ entonces:

$$(Q_1 + \mu v_1 - P_1 - \lambda u_1)u_1 + (Q_2 + \mu v_2 - P_2 - \lambda u_2)u_2 + (Q_3 + \mu v_3 - P_3 - \lambda u_3)u_3 = 0$$

Como $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ entonces:

$$(Q_1 + \mu v_1 - P_1 - \lambda u_1)v_1 + (Q_2 + \mu v_2 - P_2 - \lambda u_2)v_2 + (Q_3 + \mu v_3 - P_3 - \lambda u_3)v_3 = 0$$

Por lo tanto:

$$\lambda(-u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + \mu(v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3) = -(Q_1 - P_1)u_1 - (Q_2 - P_2)u_2 - (Q_3 - P_3)u_3$$

$$\lambda(-v_1u_1 - v_2u_2 - v_3u_3) + \mu(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = -(Q_1 - P_1)v_1 - (Q_2 - P_2)v_2 - (Q_3 - P_3)v_3$$

Llamando:

$$\begin{aligned} A &= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \\ B &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \\ C &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ D &= -(Q_1 - P_1)u_1 - (Q_2 - P_2)u_2 - (Q_3 - P_3)u_3 \\ E &= -(Q_1 - P_1)v_1 - (Q_2 - P_2)v_2 - (Q_3 - P_3)v_3 \end{aligned}$$

Formamos el sistema

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

Una vez que tenemos λ y μ el punto proyectado sobre el eje de azimut va a ser

$$P = (P_1 + \lambda u_1, P_2 + \lambda u_2, P_3 + \lambda u_3)$$

2.4. Cálculo de los parámetros de los ejes del radiotelescopio

La orientación de los ejes del radiotelescopio queda definida por siete parámetros: las tres coordenadas del punto invariante, la excentricidad, dos parámetros que definen la inclinación del eje de azimut de la antena y el ángulo de falta de ortogonalidad entre el eje de azimut y el de elevación. A continuación se detalla la forma de calcularlos:

2.4.1. Cálculo del punto invariante

Hemos visto que cada eje de elevación produce una proyección sobre el eje de azimut, así pues, calcularemos el punto invariante como la media de esas proyecciones. Para el cálculo de su desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Donde n es el número de observaciones y \bar{x} es la media de todas las observaciones.

2.4.2. Cálculo de la excentricidad

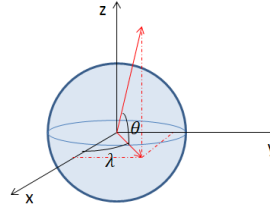
La excentricidad se define como la distancia ortogonal entre el eje de azimut y el de elevación del radiotelescopio. Para determinarla se calcula la distancia de cada eje de elevación sobre al eje de azimut y a continuación se promedian las distancias. Para el

cálculo de la desviación estándar se procede del mismo modo que para el punto invariante.

2.4.3. Cálculo de la inclinación del eje de azimut

Teniendo en cuenta que en un sistema tridimensional:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \lambda \\ y = r \cos \theta \sin \lambda \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$



donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, θ es la latitud y λ es el azimut contado desde el eje x , entonces la inclinación con respecto de la normal (eje z) viene dada:

$$\theta = 90^\circ \pm \arcsen\left(\frac{z}{r}\right)$$

Para calcular la desviación estándar de θ hay que utilizar la ley de propagación de errores. Primeramente hemos de calcular la desviación estándar de r y a continuación la de θ .

Para ello se calculan las parciales de r respecto x , y y z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto la desviación estándar al cuadrado (σ_r^2) viene dada por:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2$$

Para calcular la desviación estándar de θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{-z}{r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2$$

El azimut respecto al eje x , (λ) viene dada por:

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para calcular la desviación estándar:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{1}{x \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_\lambda^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2$$

2.4.4. Cálculo del ángulo de no ortogonalidad

Suponiendo que \vec{u} sea el vector director del eje de azimut y \vec{v} el vector director del eje de elevación el ángulo de no ortogonalidad entre el eje de azimut y el eje de elevación ejes se calcula a partir de la definición del producto escalar:

$$\cos(\widehat{uv}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Para el cálculo de la desviación estándar se procede del mismo modo que para el punto invariante.

3. Aplicación al Radiotelescopio RAEGE

3.1. Toma de medidas

Las medidas en el radiotelescopio de 13 metros del Centro de Desarrollos Tecnológicos de Yeves se realizaron en el interior de la cabina con una estación total robotizada Leica TS30 de 0.5'' y 0.6 mm de precisión angular y en distancia respectivamente, situada sobre el pilar central de la antena. Para ello se utilizó un trípode con base nivelante de plomada óptica centrada en un granetazo del tornillo de centrado del pilar. Se midió la posición de un retroreflector RRR de la firma Hexagón con una precisión geométrica de centrado de 0.0001 mm, que se adosó magnéticamente en el interior de los contrapesos izquierdo y derecho de la antena. Se tomaron medidas del corner cube (retroreflector) cada 30 segundos en cada uno de los contrapesos moviendo la antena tanto en elevación como en azimut. La estación TS30 fue controlada por un laptop conectado a través de bluetooth y corriendo un programa realizado por el observatorio que gestionaba todas las tareas de orientación, puntería, medida, registro y sincronización con el centro de control de la antena. Las mediciones fueron tomadas en incrementos de 20° en azimut y elevación. El orden de las medidas se realizó, fijando un azimut de un total de 18 y moviendo el radiotelescopio a 5 elevaciones (7°,27°,47°,67°,87°). Una vez hechas las medidas se incrementa el azimut 20° y se repite el proceso pero comenzando en sentido descendente de elevación.

Se repitió la operación colocando el CCR en el contrapeso izquierdo. En total resultaron $18 * 5 * 2 = 180$ observaciones que tomadas cada 30 segundos supusieron una duración de la observación automatizada de 90 minutos.

Para cada contrapeso se han podido ajustar 5 círculos azimutales y 18 arcos de elevación. En total 10 círculos azimutales y 36 arcos de círculo en elevación a partir de los cuales se han calculado 18 ejes de elevación.



Figura 3.1. Reflector RRR adosado magnéticamente a la cara interna de uno de los contrapesos.



Figura 3.2. Estación Total Robotizada Leica TS-30



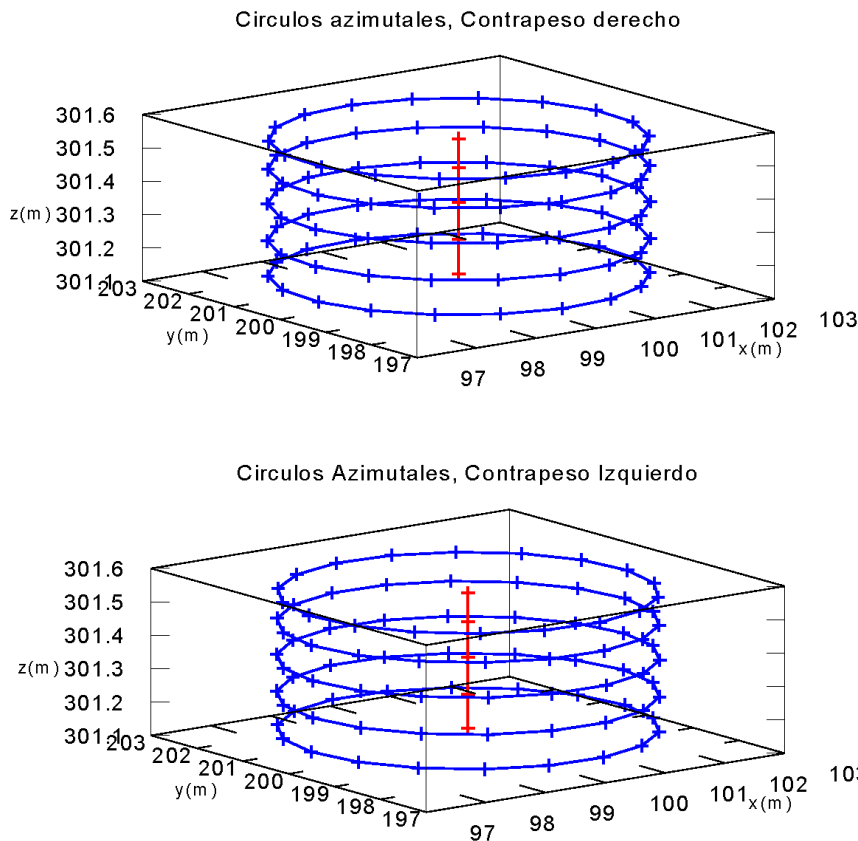
Figuras 3.3 y 3.4
Leica Red Ring Reflector (RRR) en pilar utilizado como referencia.

3.2. Resultados de las medidas

Es importante señalar que todas las medidas mostradas y calculadas se encuentran referenciadas en un sistema de coordenadas local cuyo centro de coordenadas (100,200,300) se encuentra situado en un tornillo que hay en el pilar central de la antena, en el interior de la cabina del radiotelescopio, donde se realizaron las medidas. En un futuro será necesario transformar las coordenadas de ese sistema local a uno global para conectar en el observatorio las distintas técnicas geodésicas.

Cálculo del Eje azimutal:

Para calcular el eje azimutal de la antena se han introducido en el ajuste las medidas de las 5 circunferencias azimutales para cada contrapeso, se han considerado un total de 10 circunferencias. Cada circunferencia es estimada a partir de 18 observaciones. En el ajuste se han estimado un total de 52 parámetros a partir de 360 ecuaciones de observación.



Figuras 3.5 y 3.6

Círculos azimutales generados por las medidas realizadas en el contrapeso derecho (figura de arriba) y en el contrapeso izquierdo (figura de abajo). Las elevaciones de cada circunferencia son 7º, 27º, 47º, 67º y 87º. Para determinar cada circunferencia se han utilizado 18 observaciones.

Se exponen aquí los centros y radios ajustados de dichos círculos así como los parámetros del plano ajustado en cada círculo, cuyos AA y BB son comunes a todos los planos obtenidos en el ajuste global, puesto que todos los planos comparten el mismo vector normal:

Elevación (°)	Contrapeso derecho						
	Centro			Radio (m)	Parámetros del plano		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$		$AA(m)$	$BB(m)$	$CC(m)$
7	99.997751± 0.000012	199.992258 ±0.000012	301.554917 ±0.000009	2.53796 ±0.00006	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.5533 ±0.0003
27	99.997753 ±0.000012	199.992289 ±0.000012	301.468005 ±0.000009	2.54464 ±0.00005	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.4664 ±0.0004
57	99.997755 ±0.000012	199.992256 ±0.000012	301.362589 ±0.000009	2.54871 ±0.00007	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.3610 ±0.0004
67	99.997739 ±0.000012	199.992269 ±0.000012	301.251427 ±0.000009	2.54832 ±0.00008	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.2498 ±0.0004
87	99.997757 ±0.000012	199.992270 ±0.000012	301.147889 ±0.000009	2.54357 ±0.00006	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.1463 ±0.0004

Elevación (°)	Contrapeso izquierdo						
	Centro			Radio (m)	Parámetros del plano		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$		$AA(m)$	$BB(m)$	$CC(m)$
7	99.997807 ±0.000012	199.992276 ±0.000012	301.553994 ±0.000009	2.53866 ±0.00005	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.5524 ±0.0004
27	99.997778 ±0.000012	199.992271 ±0.000012	301.467186 ±0.000009	2.54526 ±0.00005	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.4656 ±0.0004
57	99.997824 ±0.000012	199.992261 ±0.000012	301.362035 ±0.000009	2.54936 ±0.00005	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.3604 ±0.0004
67	99.997742 ±0.000012	199.992240 ±0.000012	301.251206 ±0.000009	2.54895 ±0.00005	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.2496 ±0.0004
87	99.997769 ±0.000012	199.992272 ±0.000012	301.148044 ±0.000009	2.54424 ±0.00007	-0.000032 ±0.000002	0.000024 ±0.000002	301.1464 ±0.0004

El eje de azimut o vector normal a todos los planos que contienen a todos y cada uno de los círculos y sus características vienen representadas en la siguiente tabla:

Vector director del Eje de azimut			Desviación estándar		
$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
-0.000032	0.000024	-1	0.000002	0.000002	0
Inclinación del Eje de azimut respecto de la normal (°)			Desviación estándar (°)		
-8.3			0.3		
Inclinación del Eje de azimut respecto del eje x (°)			Desviación estándar (°)		
323			2		

Sin embargo si se quieren sacar conclusiones de la estabilidad del cálculo del eje de azimut del radiotelescopio dependiendo de las distintas elevaciones del radiotelescopio a las que se han realizado las medidas para describir las circunferencias se puede realizar el ajuste de cada uno de los círculos por separado, de manera que de cada círculo ajustado se obtendrá un vector normal. La variación entre ellos ha de ser muy pequeña pero estas variaciones nos pueden indicar si al situar la antena en distintas posiciones los ejes sufren deformaciones. Se exponen aquí los resultados del ajuste de cada círculo por separado:

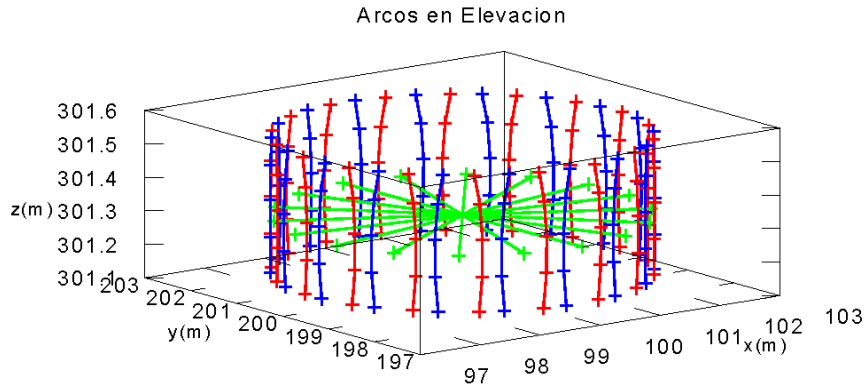
Elevación (°)	Contrapeso derecho								
	Centro			Radio(m)	Parámetros del plano			Inclinación (")	Azimut del eje (°)
	x(m)	y(m)	z(m)		AA(m)	BB(m)	CC(m)		
7	99.997751 ±0.000013	199.992258 ±0.000013	301.554917 ±0.000009	2.53796 ±0.00003	0.000022 ±0.000005	0.000022 ±0.000005	301.5534 ±0.0011	7 ±1.0	322 ±8
27	99.997753 ±0.000012	199.992289 ±0.000012	301.468005 ±0.000008	2.54464 ±0.00003	0.000023 ±0.000005	0.000023 ±0.000005	301.4660 ±0.0010	7.3 ±0.9	319 ±7
57	99.997755 ±0.000014	199.992256 ±0.000014	301.362589 ±0.000010	2.54871 ±0.00003	0.000023 ±0.000006	0.000023 ±0.000006	301.3610 ±0.0012	7.6 ±1.1	322 ±9
67	99.997739 ±0.000017	199.992269 ±0.000017	301.251427 ±0.000012	2.548320 ±0.00003	0.000022 ±0.000007	0.000022 ±0.000007	301.2500 ±0.0015	7.8 ±1.4	323 ±10
87	99.997757 ±0.000010	199.992270 ±0.000010	301.147889 ±0.000007	2.543570 ±0.00003	0.000021 ±0.000004	0.000021 ±0.000004	301.1465 ±0.0008	7.4 ±0.8	323 ±6

Elevación (°)	Contrapeso izquierdo								
	Centro			Radio (m)	Parámetros del plano			Inclinación (")	Azimut del eje (°)
	x(m)	y(m)	z(m)		AA(m)	BB(m)	CC(m)		
7	99.997807 ±0.000011	199.992276 ±0.000011	301.553994 ±0.000008	2.53866 ±0.00001	0.000028 ±0.000004	0.000028 ±0.000004	301.5519 ±0.0010	9.3 ±0.9	321 ±5
27	99.997778 ±0.000011	199.992271 ±0.000011	301.467186 ±0.000008	2.54526 ±0.00004	0.000026 ±0.000004	0.000026 ±0.000004	301.4657 ±0.0010	9.3 ±0.9	325 ±5
57	99.997824 ±0.000009	199.992261 ±0.000009	301.362035 ±0.000006	2.54936 ±0.00003	0.000025 ±0.000004	0.000025 ±0.000004	301.3604 ±0.0010	8.6 ±0.7	323.062666 ±5
67	99.997742 ±0.000015	199.992240 ±0.000015	301.251206 ±0.000010	2.54895 ±0.00004	0.000025 ±0.000006	0.000025 ±0.000006	301.2499 ±0.0013	9.1 ±1.2	326 ±7
87	99.997769 ±0.000013	199.992272 ±0.000013	301.148044 ±0.000010	2.54424 ±0.00004	0.000027 ±0.000005	0.000027 ±0.000005	301.1464 ±0.0012	9.6 ±1.1	324 ±6

Comparando los resultados del ajuste de cada círculo por separado se puede concluir que la precisión de los resultados es independiente de la elevación del radiotelescopio a la que se realicen las medidas.

Ejes de elevación

Para el cálculo de los ejes de elevación se han utilizado los centros de los arcos de círculo de ambos contrapesos para cada elevación. Cada centro de arco de círculo ha sido estimado a partir de 5 observaciones. En total se han considerado 18 arcos de círculo para cada contrapeso, esto es 36 en total, con los que se han generado 18 ejes de elevación.



Figuras 3.5

Arcos de círculo para distintos azimuts. En rojo se representan los arcos de círculo medidos en el contrapeso izquierdo y en azul los del contrapeso derecho, 36 en total. En verde están dibujados los ejes de elevación, 18 en total.

A continuación se exponen los centros de dichos arcos con sus desviaciones estándar para cada azimut y de cada contrapeso:

Azimut	Contrapeso derecho					
	Centro			Desviación estándar		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
0	98.41931	198.01644	301.31472	0.00009	0.00009	0.00002
20	97.8385	198.6757	301.31478	0.0004	0.0004	0.00011
40	97.5185	199.4934	301.31475	0.0003	0.0003	0.00009
60	97.4971	200.3717	301.31480	0.00018	0.0002	0.00005
80	97.7779	201.2039	301.31481	0.00019	0.0002	0.00005
100	98.32617	201.89022	301.31483	0.00010	0.00010	0.00003
120	99.07623	202.34708	301.31484	0.00019	0.00012	0.00005
140	99.9373	202.5203	301.31479	0.0003	0.0003	0.00008
160	100.8055	202.3886	301.31474	0.0003	0.0003	0.00009
180	101.5766	201.9680	301.31471	0.0004	0.0004	0.00010
200	102.15732	201.30918	301.31468	0.00010	0.00011	0.00003
220	102.4773	200.4909	301.31468	0.0003	0.0003	0.00008
240	102.4979	199.6129	301.31466	0.0002	0.0002	0.00006
260	102.21746	198.78052	301.31463	0.00013	0.00013	0.00004
280	101.66922	198.09452	301.31464	0.00015	0.00015	0.00004
300	100.9194	197.6370	301.31464	0.00030	0.0003	0.00008
320	100.05835	197.4641	301.31467	0.00011	0.0001	0.00003
340	99.18987	197.59582	301.31472	0.00018	0.00017	0.00005

Azimut	Contrapeso izquierdo					
	Centro			Desviación estándar		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$\sigma_x(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
0	101.5774	201.9687	301.31484	0.0002	0.0002	0.00006
20	102.1577	201.3089	301.31487	0.0002	0.0002	0.00006
40	102.4783	200.4909	301.31478	0.0002	0.0002	0.00006
60	102.4986	199.6125	301.31478	0.00018	0.0002	0.00005
80	102.21809	198.78009	301.31474	0.00013	0.00014	0.00004
100	101.6695	198.0939	301.31475	0.0002	0.0002	0.00005
120	100.91950	197.63657	301.31478	0.00016	0.00015	0.00004
140	100.0582	197.4633	301.31479	0.0003	0.0003	0.00009
160	99.18938	197.59465	301.31483	0.00012	0.00011	0.00003
180	98.4182	198.0160	301.31488	0.0002	0.0003	0.00008
200	97.83787	198.67552	301.31492	0.00015	0.00017	0.00004
220	97.5175	199.49368	301.31491	0.00009	0.00010	0.00003
240	97.4968	200.3719	301.31496	0.0002	0.0003	0.00007
260	97.77769	201.20437	301.31499	0.00015	0.00016	0.00004
280	98.3259	201.8909	301.31500	0.0002	0.0002	0.00007
300	99.0762	202.3481	301.31497	0.0003	0.0002	0.00007
320	99.93756	202.52186	301.31491	0.00010	0.00009	0.00003
340	100.8062	202.3894	301.31489	0.00011	0.0001	0.00003

Parámetros de los ejes del radiotelescopio

En la siguiente tabla se resumen todos los parámetros que definen la geometría de los ejes del radiotelescopio:

Parámetros de la geometría de los ejes del radiotelescopio RAEGE						
	Valor			Desviación estándar		
Punto invariante (x,y,z) (m)	99.997743	199.992264	301.314795	0.00005	0.00005	0.000014
Excentricidad (m)	0.00013			0.00007		
Inclinación eje azimut respecto de la normal (")	8.3			0.3		
Azimut del eje de azimut respecto x (°)	323			2		
Ángulo de no ortogonalidad (")	5.6			0.9		

Conclusiones

Existen diversas metodologías para determinar el punto invariante de un radiotelescopio. Aquí se ha descrito la más clásica de todas ellas que es el ajuste por círculos y se ha aplicado al radiotelescopio RAEGE del Observatorio de Yebes. Las coordenadas han sido calculadas en un sistema de referencia local centrado en la base del pilar central desde donde se han realizado las mediciones. La precisión que se ha alcanzado está por debajo del milímetro por lo que está dentro de los márgenes requeridos para, en un futuro, poder relacionar las diversas técnicas geodésicas disponibles en el Observatorio a partir del local tie. El siguiente paso será transformar las coordenadas en este sistema de referencia a un sistema global para lo cual se requerirá el uso de GPS en la estación.

4. Referencias

Sevilla, M.J., 1986. "Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes geodésicas", III Curso de Geodesia superior, 2, 2-69.

Sevilla, M.J., 1987. "Colocación Mínimos Cuadrados", IV Curso de Geodesia Superior, 2, 97-141.

Sevilla, M.J., 2003. "Ajuste con Constreñimientos", Seminario de geodesia Superior.

Santamaría-Gómez, A., García-Espada, S., 2011. "Simulating the estimation of the 40m radio-telescope Invariant Reference Point at the Yebes observatory". Informe Técnico IT-OAN 2011-9.

Dawson, J., Sardi, P., Johnston, G.M., Vittuari, L., 2007. "Indirect approach to invariant point determination for SLR and VLBI systems: an assessment", J. Geody. 81, 433-441.

Fancher, K., Smith, D., Breidenbach, S., Olsen, J., Paudel, N., 2010. "Recent IERS Site Survey of Multiple Co-located Geodetic Techniques by NGS", FIG Congress 2010, Facing the challenges- Building the Capacity.

Starti, P., Sillard, P., Vittuari, L., 2004 "Surveying co-located space-geodetic instrument for ITRF computation", Journal of Geodesy, 78, 210-222.